

有限梁段法在变截面连续箱梁桥剪力滞效应分析中的应用

段燕娥¹, 陈 超¹, 王方旭²

(1. 甘肃建筑职业技术学院, 兰州 730050; 2. 兰州交通大学土木工程学院, 兰州 730070)

摘要: 为了分析变截面连续箱梁桥的剪力滞效应,选取具有 2 个节点、4 个自由度的箱梁单元,引入剪力滞控制微分方程的初参数解,推导出箱梁梁段单元的刚度矩阵和等效节点荷载。利用 FORTRAN 语言编写相应计算程序,应用所编程序对某简支箱梁进行验算,并分析了某三跨变截面连续箱梁桥在主跨作用车道荷载时的剪力滞效应。结果表明:剪力滞效应对中跨 1/2 处影响最大,对左边跨、右边跨几乎没有影响;中跨 1/2 处总挠度是初等梁挠度的 1.08 倍。

关键词: 薄壁箱梁; 变截面连续梁; 能量变分法; 剪力滞效应; 有限梁段法

中图分类号: U448. 213 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-1807(2024)14-0199-06

目前研究箱梁剪力滞效应的方法和文献已有很多,其中最重要的方法是能量变分法^[1-4],利用能量变分法建立的剪力滞控制微分方程,可直接对简支箱梁等简单结构的剪力滞效应进行分析。

在能量变分法中,选取合适的剪滞翘曲位移函数是极其重要的环节,诸多学者以此为基础成功地解决了一系列箱梁剪力滞问题。其中 Reissner^[5]假设剪滞翘曲位移函数的形式为二次抛物线,首先利用能量变分法分析了双轴对称薄壁箱梁的剪力滞现象。张元海和林丽霞^[6]从剪力滞受力特点出发,推导出了合理翘曲位移函数的具体表达形式。肖军等^[7]通过对剪力滞控制微分方程通解特点的分析,构造剪力滞解析方程。近年来,对剪滞翘曲位移函数研究的文献已有很多,但尚未得到统一^[8-11]。为了使轴向平衡条件得到满足,倪元增和钱寅泉^[12]提出了对剪滞翘曲位移函数进行修正的方法。蔺鹏臻和周世军^[13]从剪力流的分布规律出发,在箱梁各板件的翘曲位移函数中引入修正系数,并考虑了翘曲正应力在箱梁横截面上不合成轴力和弯矩。关于剪力滞翘曲位移函数的修正方式的问题,各个学者的观点也各有差异^[14-16]。能量变分法只适用于对简单结构的研究,不能用于分析变截面连续箱梁桥的剪力滞效应,因此可以借助于计算机建立有限元模型,但是建立变截面连续箱梁有

限元模型很耗时,并且对计算机的要求很高,在分析时由于受到诸多因素的影响,以至于最终的结果差强人意。

为了研究剪力滞效应对变截面连续箱梁桥的影响,有学者提出分析变截面连续箱梁桥的有限梁段法^[17-20]。本文将剪力滞变形状态独立于初等梁变形状态进行分析,选取剪力滞效应引起的附加挠度作为广义位移,应用能量变分法建立剪力滞控制微分方程并求解得到初参数解。选取具有 2 个节点、4 个自由度的箱梁单元进行分析,为了简便,需要借助 FORTRAN 语言进行编程来分析三跨变截面连续箱梁桥的剪力滞效应。本文应用有限梁段法来分析变截面连续箱梁桥的剪力滞效应,为复杂桥梁结构中变厚度翼缘板箱梁剪力滞效应的分析提供了理论参考。

1 剪力滞控制微分方程及初参数解

图 1 为竖向分布荷载 $p(z)$ 作用下的受力简图。横截面上任一位置的纵向翘曲位移 $u_w(x, y, z)$ 为

$$u_w(x, y, z) = -w(x, y)f'(z) \quad (1)$$

式中: $f(z)$ 为附加挠度; $-f'(z)$ 为附加挠曲转角; $w(x, y)$ 为广义翘曲位移函数,即

$$w(x, y) = y - \eta w_\xi(x, y) \quad (2)$$

式中: η 为修正系数; $w_\xi(x, y)$ 为翘曲位移函数。

选取如下形式的翘曲位移函数:

收稿日期: 2024-04-06

作者简介: 段燕娥(1996—),女,甘肃民乐人,硕士,助教,研究方向为桥梁理论研究、桥梁设计;陈超(1992—),男,黑龙江方正人,硕士,助教,研究方向为桥梁理论研究、桥梁设计;王方旭(1992—),男,甘肃天水人,博士,工程师,研究方向为桥梁工程理论。

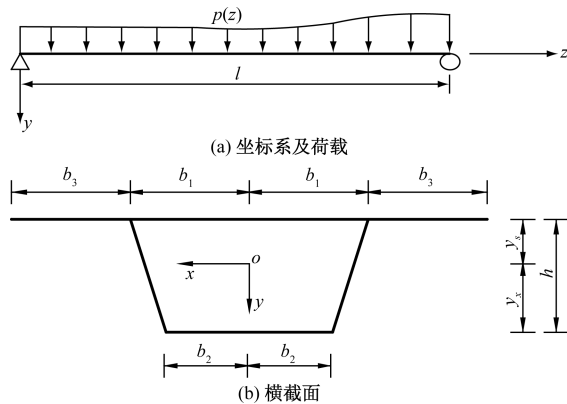


图1 箱梁截面简

$$w_x = \begin{cases} -y_s \left[1 - \left(\frac{x}{b_1} \right)^2 \right] + d, & \text{顶板} \\ -y_s \left[1 - \frac{(b_1 + b_2 - x)^2}{b_3^2} \right] \left(\frac{b_3}{b_1} \right)^2 + d, & \text{悬臂板} \\ y_x \left[1 - \left(\frac{x}{b_2} \right)^2 \right] \left(\frac{b_2}{b_1} \right)^2 \left(\frac{y_x}{y_s} \right) + d, & \text{底板} \\ d, & \text{腹板} \end{cases} \quad (3)$$

式中: d 为箱梁横截面上的正应力满足的轴向平衡条件。

$$d = \frac{2y_s}{3A} \left[A_t + A_c \left(\frac{b_3}{b_1} \right)^2 - A_b \left(\frac{b_2}{b_1} \right)^2 \left(\frac{y_x}{y_s} \right)^2 \right] \quad (4)$$

式中: A 为总截面积; A_t 、 A_c 、 A_b 分别为顶、底、悬臂板截面积。

横截面上任一位置的广义力矩 M_w 定义为

$$M_w = \int_A \sigma_w w dA = - \int_A E w^2 f'' dA = -EI_w f'' \quad (5)$$

式中: $I_w = \int_A w^2 dA$; I_w 为广义翘曲惯性矩。

剪力滞翘曲应力 σ_w 的表达式为

$$\sigma_w = \frac{M_w}{I_w} w \quad (6)$$

箱梁截面任一点处的剪力滞系数 λ 可表达为

$$\lambda = \frac{\sigma_0}{\sigma_w} = \frac{\sigma_0 + \sigma_w}{\sigma_0} = 1 + \frac{w M_w I_x}{y M_x I_w} \quad (7)$$

式中: $I_x = \int_A y^2 dA$ 。

箱梁总势能的一阶变分为

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \int_0^l (EI_x w'''' - p) \delta w dz + EI_x w'' \delta w' \Big|_0^l + \\ & \int_0^l (EI_w f'''' - \eta^2 GA_\xi f'' - p) \delta f dz - EI_x w''' \delta w \Big|_0^l + \\ & EI_w f''' \delta f' \Big|_0^l + (\eta^2 GA_\xi f' - EI_w f''') \delta f \Big|_0^l \quad (8) \end{aligned}$$

式中: A_ξ 为剪力滞翘曲面积。

令 $\delta\pi = 0$, 则剪力滞的控制微分方程可以改写为

$$f'''' - k^2 f'' = \frac{p}{EI_w} \quad (9)$$

式中: k 为 Reissner 参数, 即

$$k = \eta \sqrt{\frac{GA_\xi}{EI_w}} \quad (10)$$

式中: G 为剪切模量。

式(9)的通解为

$$f = C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{sh} kz + C_4 \operatorname{ch} kz \quad (11)$$

将各积分常数 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 用 4 个初参数 f_0 、 f'_0 、 M_{w0} 、 Q_{w0} 表示后得到

$$f = f_0 + f'_0 \frac{\operatorname{sh} kz}{k} + \frac{M_{w0}}{k^2 EI_w} (1 - \operatorname{ch} kz) + \frac{Q_{w0}}{k^3 EI_w} (kz - \operatorname{sh} kz) \quad (12)$$

$$f' = f'_0 \operatorname{ch} kz - \frac{M_{w0}}{EI_w k} \operatorname{sh} kz + \frac{Q_{w0}}{EI_w k^2} (1 - \operatorname{ch} kz) \quad (13)$$

$$M_w = -f'_0 k EI \operatorname{sh} kz + M_{w0} \operatorname{ch} kz + Q_{w0} \frac{\operatorname{sh} kz}{k} \quad (14)$$

$$Q_w = Q_{w0} \quad (15)$$

2 单元刚度矩阵及等效节点荷载

采用有 2 个节点、4 个自由度的箱梁单元来分析剪力滞效应, 图 2 为单元节点位移, 则单元位移列向量 δ 为

$$\delta = [f_i, \theta_i, f_j, \theta_j]^T \quad (16)$$

式中: f_i 、 f_j 分别为 i 、 j 的附加挠度; θ_i 、 θ_j 分别为 i 、 j 节点的附加挠曲转角。

单元节点力列向量的表达式为

$$F = [Q_{wi}, M_{wi}, Q_{wj}, M_{wj}]^T \quad (17)$$

式中: Q_{wi} 、 Q_{wj} 分别为 i 、 j 节点的广义剪力; M_{wi} 、 M_{wj} 分别为 i 、 j 节点的广义力矩。

选取基于附加挠度的方法来分析剪力滞效应, 将式(12)作为单元位移列向量的一个自由度, 对式(12)求导并反号可得到附加转角 $\theta(z)$ 为

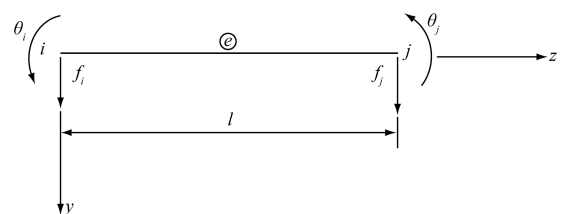


图2 单元节点位移

$$\theta(z) = -f'_0 \operatorname{ch} kz + \frac{M_{\omega 0}}{EI_{\omega} k} \operatorname{sh} kz - \frac{Q_{\omega 0}}{EI_{\omega} k^2} (1 - \operatorname{ch} kz) \quad (18)$$

在有限元学习当中已知: $\mathbf{F} = \mathbf{K}\boldsymbol{\delta}$ 。即

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ \theta_i \\ f_j \\ \theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{\omega i} \\ M_{\omega i} \\ Q_{\omega j} \\ M_{\omega j} \end{bmatrix} \quad (19)$$

式中: k_{ij} 为刚度系数, 表示第 j 个杆端位移为 1 时所引起的第 i 个杆端力的值。

当箱梁单元的两端固定, 此时 $f_i = 1, \theta_i = \theta_j = f_j = 0$, 可求得单元刚度矩阵的第一列元素为

$$\begin{cases} k_{11} = \frac{k^3 EI_{\omega} \operatorname{sh} kl}{kl \operatorname{sh} kl - 2 \operatorname{ch} kl + 2} \\ k_{21} = -\frac{k^2 EI_{\omega} (\operatorname{ch} kl - 1)}{kl \operatorname{sh} kl - 2 \operatorname{ch} kl + 2} \\ k_{31} = \frac{k^3 EI_{\omega} \operatorname{sh} kl}{kl \operatorname{sh} kl - 2 \operatorname{ch} kl + 2} \\ k_{41} = \frac{k^2 EI_{\omega} (\operatorname{ch} kl - 1)}{kl \operatorname{sh} kl - 2 \operatorname{ch} kl + 2} \end{cases} \quad (20)$$

同理, 可求得箱梁单元刚度矩阵的其他列元素。

根据式(11)求导并反号, 将 $C_1 \sim C_4$ 用各节点位移表示代入式(11)中得

$$\mathbf{f}(z) = N_j \boldsymbol{\delta} = [N_1, N_2, N_3, N_4] \quad (21)$$

式中: N_f 为形函数, 即

$$\mathbf{N}_f = [N_1(z), N_2(z), N_3(z), N_4(z)] \quad (22)$$

当均布荷载 q 作用在单元上时的等效节点力为

$$\mathbf{p}_q^f = q \int_0^l N_f^T dz = q \int_0^l \begin{bmatrix} N_1(z) \\ N_2(z) \\ N_3(z) \\ N_4(z) \end{bmatrix} dz \quad (23)$$

根据以上公式推导可知均布荷载作用下的等效节点力 $\mathbf{p}_q^f$ 为

$$\mathbf{p}_q^f = \left(\frac{q}{2} \right) [l, -\xi, l, \xi]^T \quad (24)$$

式中: $\xi = \frac{1}{k^2 D} [k^2 l^2 (1 + \operatorname{ch} kl) + 4(\operatorname{ch} kl - kl \operatorname{sh} kl - 1)]$ 。

3 数值分析

FORTTRAN 语言程序由输入文件 labin 以及输出文件 LAGOUT 组成, 输入文件以及输出文件可由电脑的记事本编辑和打开。该程序操作起来也非常方便, 只需在输入文件中输入相应的参数, 比如弹性模量、约束情况、截面特性等, 输入完成之后保存到记事本, 然后进行程序分析, 最后打开输出

文件则可查看数据和结果。

为了验证该程序的正确性, 选取计算跨度为 40 m 的箱梁, 采用 C40 混凝土, 跨中作用一集中荷载 $P=500$ kN。分别用本文编译的程序以及 ANSYS 软件分析该算例, 若两种方法计算的结果接近, 则说明该程序正确。

选取跨中横截面上五个关键点来进行分析, 关键点所在位置以及算例箱梁截面尺寸如图 3 所示。

首先利用本文编译的程序计算该算例, 该箱梁跨度为 40 m, 将该算例划分为 20 个单元, 21 个节点。将该算例的截面尺寸按照一定的规则输入到计算截面几何特性的输入文件 tapin 中, 然后对该程序进行运算, 最后可由输出文件 tapout 查看该箱梁的截面几何特性。将输出文件所得到的 Reissner 参数 k 以及广义翘曲惯性矩 I_{ω} 输入到输入文件 labin 中, 然后进行程序运算, 最后可得各截面的附加挠度以及广义力矩, 从而得到跨中截面各关键点的应力。

利用 ANSYS 软件对该箱梁模型进行有限元数值分析, 模型采用 shell63 单元, 共划分 32 153 个节点、32 000 个单元。为了减小应力集中影响, 故将荷载施加在两腹板节点处, 计算得到各关键点的跨中截面应力, 并与程序得到的应力作对比如表 1 所示。

由表 1 可以看出, 该程序计算出来的结果和 ANSYS 模型分析得到的结果相差不大, 从而说明了该程序的正确性。

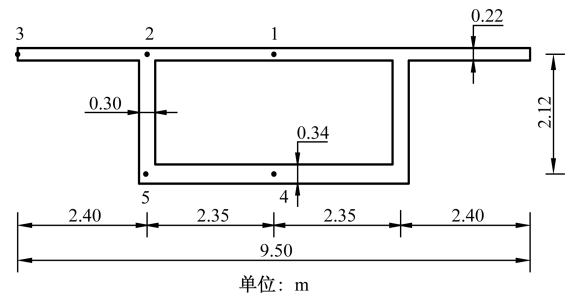


图 3 箱梁模型

表 1 总应力对比

计算截面	关键点	程序结果	ANSYS 结果	差值比 (δ_1)/%
跨中截面	1	-947.25	-873.41	7.79
	2	-1 205.37	-1 013.84	15.89
	3	-936.26	-862.20	7.91
	4	1 117.09	1 130.00	1.16
	5	1 501.22	1 399.30	6.79

在实际工程中,箱型截面一般为变截面,其顶板、底板、翼缘板的厚度均呈线性变化。本文对变截面连续箱梁桥各板厚变化的处理是将其划分为有限个独立的单元体。选取三跨变截面连续箱梁永思桥[(40+65+40) m]为工程实例,主桥总共划分了 84 个单元、85 个节点。由于该算例为对称结构,所以总共划分了 23 种单元类型、24 种截面类型。在中跨布置均布荷载、中跨 1/2 处布置集中荷载,由规范可知,其产生的集中荷载为 $P_k=2\times 360\times 0.75\times 1=540\text{ kN}$,均布荷载为 $q_k=2\times 10.5\times 0.75\times 1=15.75\text{ kN/m}$,如图 4 所示。

利用 FORTRAN 语言程序计算出附加挠度,并应用有限元小程序 FRAME2 计算出初等梁挠度,总的挠度也就是初等梁挠度与附加挠度之和,即为实际挠度,并绘出沿纵向分布的初等梁挠度和总挠度的对比图。

图 5 为挠度对比图,即为总挠度与初等梁挠度沿纵向方向的对比,由图可知剪力滞效应对中跨 1/2 处影响最大,对左边跨、右边跨几乎没有影响。中跨 1/2 处总挠度是初等梁挠度的 1.08 倍。

由公式计算得到各关键点处的翘曲正应力,以及由已知的材料力学的公式计算得到弯曲正应力,并计算出各关键点的剪力滞系数,如表 2 所示。

在箱梁控制截面的上顶板以及底板选一些关键点,并计算出这些关键点处的总应力,总应力即为弯曲正应力与翘曲正应力之和,并绘出沿横向方向的总应力图(图 6~图 9)。

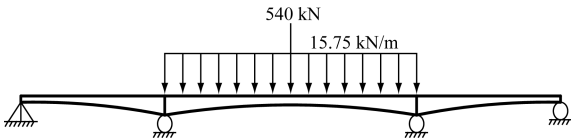


图 4 布载

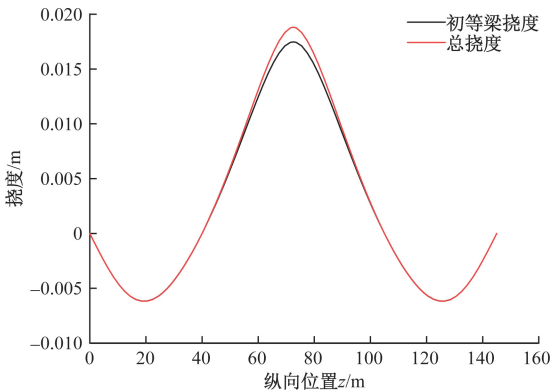


图 5 挠度对比

图 6 为中跨 1/2 处在上顶板的总应力,可知总应力的最小值位置在关键点 1 处,值为 1 613. 625 kPa;最大值位置在关键点 2 处,达到了 1 803. 168 kPa,是最小值的 1.12 倍。图 7 为中跨 1/2 处在底板的总应力,呈下降趋势,总应力的最大值位置在关键点 5 处,达

表 2 关键点处的应力及剪力滞系数

截面位置	关键点	弯曲正应力 (σ)/kPa	翘曲正应力 (σ_w)/kPa	λ
中跨 1/2	1	-1 699. 660	86. 038	0. 949
	2	-1 699. 660	-139. 284	1. 082
	3	-1 699. 660	66. 444	0. 961
	4	3 061. 254	-340. 729	0. 889
	5	3 061. 254	390. 202	1. 127
墩支点	1	701. 184	-6. 184	0. 991
	2	701. 184	65. 415	1. 093
	3	701. 184	-70. 386	0. 900
	4	-740. 310	16. 106	0. 978
	5	-740. 310	-23. 512	1. 032

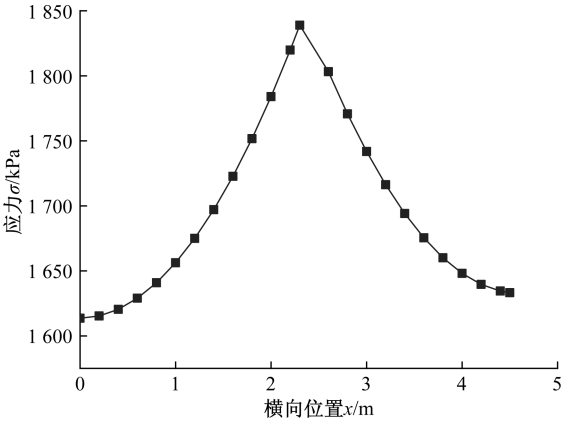


图 6 中跨 1/2 处上顶板总应力

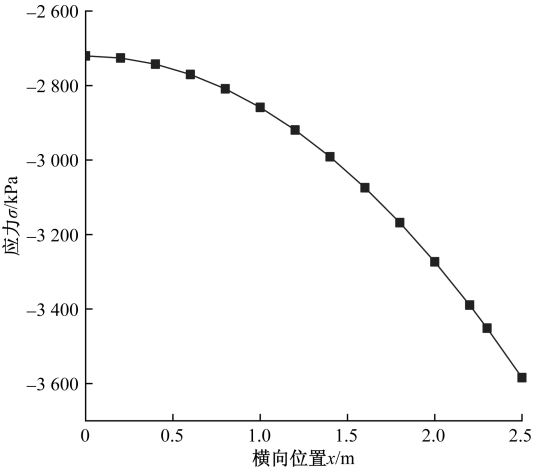


图 7 中跨 1/2 处底板总应力

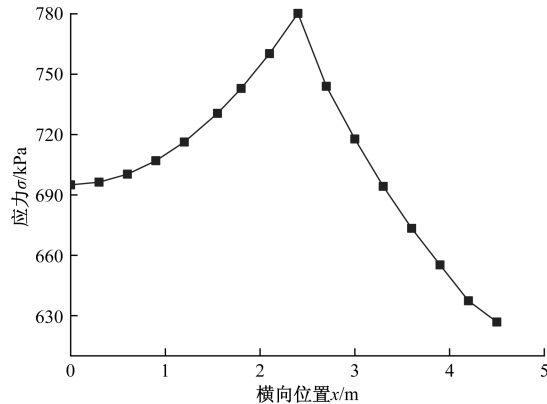


图8 墩支点处上顶板总应力

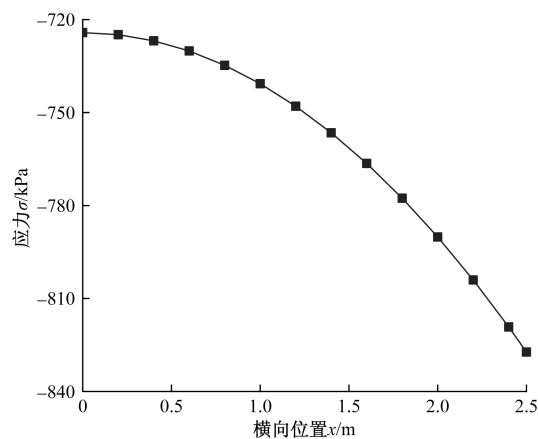


图9 墩支点处底板总应力

到 3 584.1 kPa。图 8 为墩支点处在上顶板的总应力,由此可知总应力的最小值位置在关键点 3 处,值为 626.802 kPa;最大值位置在关键点 2 处,达到 780.207 kPa,是最小值的 1.24 倍。图 9 为墩支点处在底板的总应力,呈下降趋势,总应力的最大值位置在关键点 5 处,达到 827.267 kPa。

4 结论

(1) 在能量变分法的基础上,提出有限梁段法来分析变截面连续箱梁桥的剪力滞效应是非常方便的,并且精度很高。

(2) 本文选取具有 2 个节点、4 个自由度的箱梁单元进行分析,利用 FORTRAN 语言程序分析变截面连续箱梁桥的剪力滞效应,由算例分析可知,程序结果与 ANSYS 结果基本吻合,证明了程序的正确性。

(3) 在中跨作用均布荷载、中跨 1/2 处作用集中荷载时,剪力滞效应对中跨 1/2 处影响最大,对左边跨、右边跨几乎没有影响;中跨 1/2 处总挠度是初等梁挠度的 1.08 倍。

参考文献

- [1] 赵庆友, 张元海, 邵江艳. 翼板变厚度箱形梁的剪力滞效应分析[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(6): 609-619.
- [2] 周月娥, 刘泰玉, 严鹏. 剪力滞效应下箱型梁的可靠度分析[J]. 科学技术与工程, 2022, 22(16): 6613-6618.
- [3] 卢敏锋, 丁南宏. 变宽截面箱梁剪力滞效应研究[J]. 计算力学学报, 2022, 39(6): 818-823.
- [4] 姜瑞娟, 肖玉凤, 吴启明, 等. 基于能量变分法的波形钢腹板组合箱梁剪力滞效应研究[J]. 建筑结构学报, 2019, 40(S1): 271-277.
- [5] REISSNER E. Analysis of shear lag in box beams by the principle of the minimum potential energy[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1946, 4(3): 268-278.
- [6] 张元海, 林丽霞. 薄壁箱梁剪力滞效应分析的初参数法[J]. 工程力学, 2013, 30(8): 205-211.
- [7] 肖军, 李小珍, 刘德军, 等. 一种剪滞翘曲位移函数的解析构造法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2017, 49(3): 162-167.
- [8] 周茂定, 李丽园, 张元海. 薄壁箱梁的剪力滞翘曲位移函数研究[J]. 中国公路学报, 2015, 28(6): 67-73.
- [9] 张玉平, 胡火全, 李传习, 等. 薄壁箱梁剪力滞翘曲位移函数的改进与对比分析[J]. 应用力学学报, 2016, 33(6): 1099-1105.
- [10] 张元海, 马云亮, 刘泽翔. 偏载作用下薄壁箱梁空间整体效应的综合分析[J]. 土木工程学报, 2024, 57(4): 48-58.
- [11] 张玉元, 张元海, 张慧. 基于剪力滞附加挠度的箱梁弯曲自振特性分析[J/OL]. 铁道学报, 2021, 43(8): 157-162.
- [12] 倪元增, 钱寅泉. 弹性薄壁梁桥分析[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000.
- [13] 蔺鹏臻, 周世军. 基于剪切变形规律的箱梁剪力滞效应研究[J]. 铁道学报, 2011, 33(4): 100-104.
- [14] 李夏元, 万水, 陈建兵, 等. 基于修正翘曲位移函数的薄壁箱梁剪力滞效应分析[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2018, 48(5): 851-856.
- [15] 薛飞, 张智凯, 黄梁, 等. 铁路连续槽形梁桥剪力滞效应分析[J]. 科学技术与工程, 2023, 23(36): 15649-15655.
- [16] 陈建民, 骆维斌, 冀伟. 变截面箱梁桥悬臂施工过程剪力滞效应[J]. 科学技术与工程, 2022, 22(31): 13950-13957.
- [17] 黄洪猛, 张元海. 不同翘曲位移函数对薄壁箱梁剪力滞效应的影响[J]. 兰州交通大学学报, 2022, 41(3): 1-7.
- [18] 赵志, 张鹏飞, 张元海. 变截面连续箱梁桥剪力滞效应的有限梁段法分析[J]. 力学与实践, 2021, 43(5): 728-733.
- [19] 周朋, 蔺鹏臻. 变截面连续箱梁剪力滞分析的有限梁段法[J]. 铁道科学与工程学报, 2018, 15(4): 948-955.
- [20] 周茂定, 蔺鹏臻, 张元海. 基于广义位移的波形钢腹板组合箱梁有限梁段分析方法[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2021, 51(5): 747-753.

Application of Finite Beam Segment Method in Shear Lag Effect Analysis of Variable Cross-section Continuous Box Girder Bridges

DUAN Yan'e¹, CHEN Chao¹, WANG Fangxu²

(1. Gansu Vocational College of Architecture, Lanzhou 730050, China;

2. School of Civil Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In order to analyze the shear lag effect of a variable cross-section continuous box girder bridge, a box girder element with 2 nodes and 4 degrees of freedom was selected. The initial parameter solution of the shear lag control differential equation was introduced, and the stiffness matrix and equivalent node load of the box girder segment element were derived. Using FORTRAN language to write corresponding calculation programs, the program was applied to verify a simply supported box girder, and the shear lag effect of a three span variable cross-section continuous box girder bridge under lane load on the main span was analyzed. The results show that the shear lag effect has the greatest impact on the mid span at 1/2, and has almost no effect on the left and right spans; The total deflection at 1/2 of the mid span is 1.08 times that of the elementary beam deflection.

Keywords: thin-walled box girder; variable cross-section continuous beam; energy variational method; shear lag effect; finite beam segment method.