绿色闭环供应链网络解的存在性研究

徐嘉磊，林　志

(重庆交通大学数学与统计学院，重庆 400074)

摘要： 利用变分不等式相关知识对绿色闭环供应链网络均衡条件进行研究，构建各个决策者的可行策略的集值映射，将绿色闭环供应链网络均衡问题转化为广义 Nash 均衡问题，结合集值映射的连续性、凸性与紧性，利用不动点定理研究绿色闭环供应链网络解的存在性与均衡条件。基于研究结论，提出绿色闭环供应链网络各层决策者对应的变分不等式以及多准则网络均衡条件和绿色闭环供应链网络解的存在性定理。

关键词： 绿色闭环供应链；广义 Nash 均衡；集值映射；上半连续；下半连续；拟凹性

中图分类号： F274　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1671－1807(2024)11－0020－08

1986 年，Dafermos[1] 研究发现一种空间价格均衡模型与多模式交通网络均衡模型是具有等价关系的。Nagurney[2-3] 对这一研究产生了浓厚的兴趣，她对均衡问题与变分不等式是否存在一定的联系开展研究，得出 Nash 博弈均衡解与变分不等式的解是相互等价的。2002 年，Nagurney 等[4] 基于需求市场确定性需求、制造商生产单一商品、产品销售渠道唯一的假设下，求得了由制造商、零售商及需求市场 3 方组成的供应链网络的均衡解。

随着时代的进步，学者们发现正向供应链网络研究中并没有考虑制造生产、运输等行为中会产生废弃物，有的废弃物不处理会对生态环境造成破坏，而有的废弃物可回收再生产，不妥善处理供应链网络中所产生的废弃物与可持续发展的理念背道而驰。故绿色闭环供应链网络应运而生，并逐渐成为主流。部分学者在研究绿色闭环供应链时考虑碳排放因素进行优化。Reddy 等[5] 考虑了产品生产、处置、回收和运输等过程中所产生的碳排放量，并将其转化为碳排放成本，计算到企业(制造商)的总成本中，以最小化供应链总成本为目标来进行建模。Valderrama 等[6] 在碳排放计划下对多层、多周期和多产品的采矿供应链网络进行研究。模型的第一个优化目标是最小化碳排放量，第二个优化目标是最小化包含投资、运输成本、设施运营成本的供应链总成本。研究表明，如果决策者希望规避风险，则供应链总成本和碳排放量在一定程度均会增加。顾秋阳等[7] 将供应商数量折扣问题结合到多产品绿色供应链网络中，在优化总成本的同时，追求最小化碳排放与最大化消费者满意度。该模型的决策包括了混合处理中心选址、交通工具选择、技术种类的选择、产品的流向以及库存管理等。张桂涛等[8] 建立了高排放、低排放两种类型的制造商、碳交易中心、需求市场组成的闭环供应链网络模型，探讨了闭环供应链网络中产品的最优定价、最优定量与碳交易决策。

本文从广义 Nash 均衡的角度研究绿色闭环供应链网络均衡解的存在性。首先构建包含制造商、零售商、需求市场，其中零售商担任回收中心的三级绿色闭环供应链。然后利用非线性均衡理论与集值映射方面的理论知识，从广义 Nash 均衡的角度验证了当其供应链网络各成员的各成本函数与废弃物排放函数是连续的凸函数时，绿色闭环供应链网络就一定存在一个均衡解。

1　绿色闭环供应链模型

绿色闭环供应链网络结构有 m 个制造商，n 个零售商/回收中心和 o 个需求市场。其中制造商们制造/再制造 s 种同等质量无差别产品，新产品与再制造产品不做区分。正向供应链：制造商生产的产品销往不同的零售商，再由零售商出售给不同需求

收稿日期： 2024-02-08

基金项目： 国家自然科学基金(12271067)

作者简介： 徐嘉磊(1998—)，男，浙江台州人，硕士研究生，研究方向为非线性均衡理论；林志(1964—)，男，四川成都人，博士，教授，硕士研究生导师，研究方向为非线性均衡理论、博弈论。

市场的顾客。逆向供应链:回收中心从各个需求市场回收可再制造的产品,再将回收的产品运往制造商进行再制造。图1均衡状态下的供应链网络结构所示。均衡解用‘*’表示。

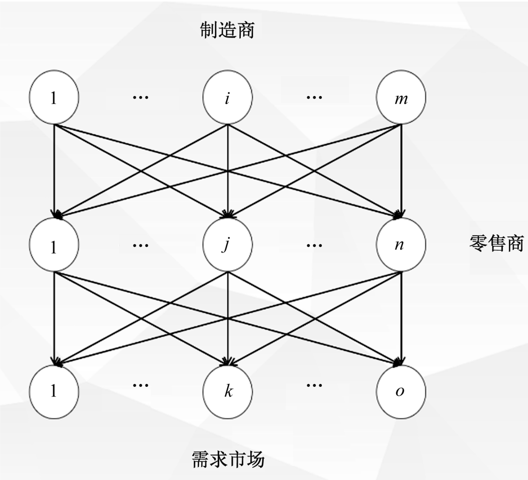

图1　均衡状态下的闭环供应链网络结构

1.1　制造商的竞争行为及其均衡条件

用 q_i^{lN} 表示制造商 i 生产产品 l 所需原材料的数量,ρ^{lN} 为生产第 l 种产品所需原材料的单位价格,q_{ij}^l 表示制造商 i 供应给零售商 j 第 l 种产品的数量,q_{ij}^{lR} 表示制造商 i 从回收中心 j 购买第 l 种可再制造产品的数量。将行向量表示为

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{N}}:=(q_1^{1\mathrm{N}},q_2^{1\mathrm{N}},\cdots,q_m^{1\mathrm{N}},q_1^{2\mathrm{N}},\cdots,q_m^{2\mathrm{N}},\cdots,q_1^{s\mathrm{N}},\cdots,q_m^{s\mathrm{N}})\in R_+^{ms};$$

$$\boldsymbol{Q}_{1i}:=(q_{i1}^1,q_{i2}^1,\cdots,q_{in}^1,q_{i1}^2,\cdots,q_{in}^2,\cdots,q_{i1}^s,\cdots,q_{in}^s)\in R_+^{ns};$$

$$\boldsymbol{Q}_{1i}^{\mathrm{R}}:=(q_{i1}^{1\mathrm{R}},q_{i2}^{1\mathrm{R}},\cdots,q_{in}^{1\mathrm{R}},q_{i1}^{2\mathrm{R}},\cdots,q_{in}^{2\mathrm{R}},\cdots,q_{i1}^{s\mathrm{R}},\cdots,q_{in}^{s\mathrm{R}})\in R_+^{ns};$$

$$\boldsymbol{Q}_1:=(Q_{11},Q_{11}^{\mathrm{R}},Q_{12},Q_{12}^{\mathrm{R}},\cdots,Q_{1m},Q_{1m}^{\mathrm{R}})\in R_+^{2mns}。$$

用 f_i^l 表示每个制造商 i 生产第 l 种产品的生产成本函数,该生产成本函数通常取决于制造商购买的原材料数量与可再制造产品数量,即 $f_i^l=f_i^l(q_i^{lN},\sum_{j=1}^n q_{ij}^{lR})$。$c_{ij}^l$ 表示制造商 i 和零售商 j 之间第 l 种产品与可再制造产品的交易成本,是向量 $\boldsymbol{Q}_1$ 分量 (q_{ij}^l,q_{ij}^{lR}) 的函数,即 $c_{ij}^l=c_{ij}^l(q_{ij}^l,q_{ij}^{lR})$。

用 ρ_{ij}^l 表示制造商 i 批发给零售商 j 第 l 种产品的单位价格,ρ_{ij}^{lR} 表示制造商 i 支付给回收中心 j 第 l 种可再制造产品的单位回收价格。对制造商 i 而言,其第一决策准则是实现利润最大化,故其优化模型为

$$\left\{\begin{aligned}&\max\sum_{l=1}^s\sum_{j=1}^n\rho_{ij}^l q_{ij}^l-\rho^{lN}q_i^{lN}-\sum_{l=1}^s\sum_{j=1}^n\rho_{ij}^{lR}q_{ij}^{lR}-\\&\qquad\sum_{l=1}^s f_i^l\Big(q_i^{lN},\sum_{j=1}^n q_{ij}^{lR}\Big)-\sum_{l=1}^s\sum_{j=1}^n c_{ij}^l(q_{ij}^l,q_{ij}^{lR})\\&\mathrm{s.t.}\ \sum_{j=1}^n q_{ij}^l\leqslant\beta_i^N q_i^{lN}+\sum_{j=1}^n\beta_i^R q_{ij}^{lR},\quad q_i^{lN}\geqslant 0,\\&\qquad q_{ij}^l\geqslant 0,\quad q_{ij}^{lR}\geqslant 0\\&i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n;\ l=1,2,\cdots,s\end{aligned}\right.\tag{1}$$

式中:β_i^N、β_i^R 分别为制造商 i 生产产品 l 单位原材料与回收产品的新产品转化率,式(1)的约束条件表示制造商售出给零售商的商品总数不得超过其生产总数。

此外,制造商们关心生产产品以及将产品运输到各个零售商的过程中产生的废弃物排放总量。用 a_i^l 表示在制造商 i 生产第 l 种产品产生的废弃物排放函数,b_{ij}^l 表示在制造商 i 向零售商 j 运输或回收第 l 种产品产生的废弃物排放函数,得到制造商 i 的第二目标函数,废弃物排放量最小化,即

$$\left\{\begin{aligned}&\min\sum_{l=1}^s a_i^l\Big(q_i^{lN},\sum_{j=1}^n q_{ij}^{lR}\Big)+\sum_{l=1}^s\sum_{j=1}^n b_{ij}^l(q_{ij}^l,q_{ij}^{lR})\\&\mathrm{s.t.}\ \sum_{j=1}^n q_{ij}^l\leqslant\beta_i^N q_i^{lN}+\sum_{j=1}^n\beta_i^R q_{ij}^{lR},\quad q_i^{lN}\geqslant 0,\\&\qquad q_{ij}^l\geqslant 0,\quad q_{ij}^{lR}\geqslant 0\\&i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n;l=1,2,\cdots,s\end{aligned}\right.\tag{2}$$

参考文献[9],赋予式(2)一个非负权重 ω_i,这一权重可表示为制造商 i 愿意为每单位废弃物排放支付的价格,或可理解为制造商 i 对环境的重视程度,权重越高表明制造商对环境越重视。因此,制造商 i 的多准则决策问题转化为

$$\left\{\begin{aligned}&\max P_i=\max\sum_{l=1}^s\sum_{j=1}^n\rho_{ij}^l q_{ij}^l-\rho^{lN}q_i^{lN}-\\&\qquad\sum_{l=1}^s\sum_{j=1}^n\rho_{ij}^{lR}q_{ij}^{lR}-\sum_{l=1}^s f_i^l\Big(q_i^{lN},\sum_{j=1}^n q_{ij}^{lR}\Big)-\\&\qquad\sum_{l=1}^s\sum_{j=1}^n c_{ij}^l(q_{ij}^l,q_{ij}^{lR})-\omega_i^l\Big[\sum_{l=1}^s a_i^l\Big(q_i^{lN},\sum_{j=1}^n q_{ij}^{lR}\Big)+\\&\qquad\sum_{l=1}^s\sum_{j=1}^n b_{ij}^l(q_{ij}^l,q_{ij}^{lR})\Big]\\&\mathrm{s.t.}\ \sum_{j=1}^n q_{ij}^l\leqslant\beta_i^N q_i^{lN}+\beta_i^R q_i^{lR},\quad q_i^{lN}\geqslant 0,\\&\qquad q_{ij}^l\geqslant 0,\quad q_{ij}^{lR}\geqslant 0\\&i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n;l=1,2,\cdots,s\end{aligned}\right.\tag{3}$$

假设所有制造商都处于非合作竞争状态,则所

有制造商同时达到最优的条件等价于以下变式不等式，即求解 $(\boldsymbol{Q}^{N^*},\boldsymbol{Q}_1^*,\boldsymbol{\gamma}_1^*)^{\mathrm{T}} \in R_+^{ms+2mns+ms+ms}$ 满足

$$\begin{cases}\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big[\frac{\partial c_{ij}^l(q_{ij}^{l^*},q_{ij}^{l\mathrm{R}^*})}{\partial q_{ij}^l}-\rho_{ij}^{l^*}+\\ \omega_i^l\frac{\partial b_{ij}^l(q_{ij}^{l^*},q_{ij}^{l\mathrm{R}^*})}{\partial q_{ij}^{l^*}}+\gamma_{1i}^{l^*}\Big]\times[q_{ij}^l-q_{ij}^{l^*}]+\\ \sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big\{\rho_{ij}^{l\mathrm{R}^*}+\frac{\partial f_i^l\Big(q_i^{l\mathrm{N}^*},\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^{l\mathrm{R}^*}\Big)}{\partial q_{ij}^{l\mathrm{R}}}+\\ \frac{\partial c_{ij}^l(q_{ij}^{l^*},q_{ij}^{l\mathrm{R}^*})}{\partial q_{ij}^l}+\omega_i^l\Big[\frac{\partial a_i^l\Big(q_i^{l\mathrm{N}^*},\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^{l\mathrm{R}^*}\Big)}{\partial q_{ij}^{l\mathrm{R}^*}}+\\ \frac{\partial b_{ij}^l(q_{ij}^{l^*},q_{ij}^{l\mathrm{R}^*})}{\partial q_{ij}^{l\mathrm{R}}}\Big]-\beta_i^{l\mathrm{R}}\gamma_{1i}^l\Big\}\times[q_{ij}^{l\mathrm{R}}-q_{ij}^{l\mathrm{R}*}]+\\ \sum_{l=1}^{s}\sum_{i=1}^{m}\Big[\rho_i^{l\mathrm{N}^*}+\frac{\partial f_i^l\Big(q_i^{l\mathrm{N}^*},\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^{l\mathrm{R}^*}\Big)}{\partial q_i^{l\mathrm{N}^*}}+\\ \omega_i^l\frac{\partial a_i^l\Big(q_i^{l\mathrm{N}^*},\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^{l\mathrm{R}^*}\Big)}{\partial q_i^{l\mathrm{N}^*}}-\beta_i^{l\mathrm{N}}\gamma_{1i}^{l^*}\Big]\times[q_i^{l\mathrm{N}}-q_i^{l\mathrm{N}^*}]+\\ \sum_{l=1}^{s}\sum_{i=1}^{m}[\beta_i^{l\mathrm{N}}q_i^{l\mathrm{N}^*}+\sum_{j=1}^{n}\beta_i^{l\mathrm{R}}q_{ij}^{l\mathrm{R}^*}-\\ \sum_{j=1}^{n}q_{ij}^{l^*}]\times[\gamma_{1i}^l-\gamma_{1i}^{l^*}]\geqslant 0,\\ \forall(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{N}},\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{\gamma}_1)^{\mathrm{T}}\in R_+^{ms+2mns+ms+ms}\end{cases} \tag{4}$$

式中：γ_{1i}^l 为式(3)中约束相关联的拉格朗日乘子，γ_1 为(4)式中所有拉格朗日乘子的 ms 维行向量。

1.2 零售商的竞争行为及其均衡条件

用 q_{jk}^l 表示需求市场 k 在零售商 j 购买第 l 种产品的数量，$q_{jk}^{l\mathrm{R}}$ 表示回收中心 j 从需求市场 k 回收第 l 种可再制造产品的数量。将行向量表示为

$$\boldsymbol{Q}_{2j}:=(q_{j1}^1,q_{j2}^1,\cdots,q_{jn}^1,q_{j1}^2,\cdots,q_{jn}^2,\cdots,q_{j1}^s,\cdots,q_{jn}^s)\in R_+^{os};$$

$$\boldsymbol{Q}_{2j}^{\mathrm{R}}:=(q_{j1}^{1\mathrm{R}},q_{j2}^{1\mathrm{R}},\cdots,q_{jn}^{1\mathrm{R}},q_{j1}^{2\mathrm{R}},\cdots,q_{jn}^{2\mathrm{R}},\cdots,q_{j1}^{s\mathrm{R}},\cdots,q_{jn}^{s\mathrm{R}})\in R_+^{os};$$

$$\boldsymbol{Q}_2:=(Q_{21},Q_{21}^{\mathrm{R}},Q_{22},Q_{22}^{\mathrm{R}},\cdots,Q_{2n},Q_{2n}^{\mathrm{R}})\in R_+^{2nos}。$$

零售商 j 需要对所有产品进行储存或展示，有储藏展示成本，用 c_j 表示，是向量 $\boldsymbol{Q}_1$ 函数，即 $c_j=c_j(\boldsymbol{Q}_1)$。

用 ρ_{jk}^l 表示需求市场 k 在零售商 j 购买第 l 种产品的零售价格，$\rho_{jk}^{l\mathrm{R}}$ 表示回收中心 j 向需求市场 k 回收第 l 种可再制造产品的单位回收价格。故零售商 j 的利润最大化模型为

$$\begin{cases}\max P_j=\max\sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{o}\rho_{jk}^l q_{jk}^l+\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}^{l\mathrm{R}}q_{ij}^{l\mathrm{R}}-\\ \quad\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}^l q_{ij}^l-\sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{o}\rho_{jk}^{l\mathrm{R}}q_{jk}^{l\mathrm{R}}-c_j(\boldsymbol{Q}_1)\\ \text{s.t.}\ \sum_{k=1}^{o}q_{jk}^l\leqslant\sum_{i=1}^{n}q_{ij}^l,\quad\sum_{i=1}^{n}q_{ij}^{l\mathrm{R}}\leqslant\sum_{k=1}^{o}q_{jk}^{l\mathrm{R}},\\ \quad q_{jk}^l\geqslant 0,q_{jk}^{l\mathrm{R}}\geqslant 0\\ i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n;\\ \quad k=1,2,\cdots,o;l=1,2,\cdots,s\end{cases} \tag{5}$$

式(5)中的约束条件表示消费者从零售商处购买的产品不能超过其库存量，制造商们不能从回收中心中购买超过库存的回收产品。

假设所有零售商都处于非合作竞争状态，则所有零售商同时达到最优的条件等价于以下变式不等式，即求解 $(\boldsymbol{Q}_1^*,\boldsymbol{Q}_2^*,\boldsymbol{\rho}_2^*,\boldsymbol{\gamma}_2^*,\boldsymbol{\gamma}_3^*)^{\mathrm{T}}\in R_+^{2mns+2nos+ns+ns+ns}$ 满足

$$\begin{gathered}\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big[\frac{\partial c_j(\boldsymbol{Q}_1^*)}{\partial q_{ij}^l}+\rho_{ij}^{l^*}-\gamma_{2j}^{l^*}\Big]\times[q_{ij}^l-q_{ij}^{l^*}]+\\ \sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o}[-\rho_{jk}^{l^*}+\gamma_{2j}^{l^*}]\times[q_{jk}^l-q_{jk}^{l^*}]+\\ \sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\Big[\sum_{i=1}^{m}q_{ij}^{l^*}-\sum_{k=1}^{o}q_{jk}^{l^*}\Big]\times[\gamma_{2j}^l-\gamma_{2j}^{l^*}]+\\ \sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o}[\rho_{jk}^{l\mathrm{R}^*}-\gamma_{3j}^{l^*}]\times[q_{jk}^{l\mathrm{R}}-q_{jk}^{l\mathrm{R}^*}]+\\ \sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big[\frac{\partial c_j(\boldsymbol{Q}_1^*)}{\partial q_{ij}^{l\mathrm{R}}}-\rho_{ij}^{l\mathrm{R}^*}+\gamma_{3j}^{l^*}\Big]\times[q_{ij}^{l\mathrm{R}}-q_{ij}^{l\mathrm{R}^*}]+\\ \sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{o}q_{jk}^{l\mathrm{R}^*}-\sum_{i=1}^{m}q_{ij}^{l\mathrm{R}^*}\Big]\times[\gamma_{3j}^l-\gamma_{3j}^{l^*}]\geqslant 0;\\ \forall\ (\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)^{\mathrm{T}}\in R_+^{2mns+2nos+ns+ns}\end{gathered} \tag{6}$$

式中：γ_{2j}^l、γ_{3j}^l 分别为式(5)中零售商 j 两个约束相关联的拉格朗日乘子；γ_2、γ_3 分别为所有 γ_{2j}^l、γ_{3j}^l 拉格朗日乘子的 ns 维行向量。

1.3 需求市场的竞争行为及其均衡条件

用 c_{jk}^l、$c_{jk}^{l\mathrm{R}}$ 分别表示为需求市场 k 和零售商 j 之间的第 l 种产品与第 l 种可再制造产品的交易成本，是向量 $\boldsymbol{Q}_2$ 分量 q_{jk}^l、$q_{jk}^{l\mathrm{R}}$ 的函数，即 $c_{jk}^l=c_{jk}^l(q_{ij}^l)$，$c_{jk}^{l\mathrm{R}}=c_{jk}^{l\mathrm{R}}(q_{ij}^{l\mathrm{R}})$。

用 ρ_k^l 表示在需求市场 k 中产品 l 的需求价格，ρ_3^l 为需求市场 k 中产品 l 的需求价格组成的向量。而 d_k^l 表示需求市场 k 对产品 l 的需求量，需求函数通常也取决于各个需求市场对产品 l 的需求价格，即 $d_k^l=d_k^l(\rho_3^l)$。借用 Wardop 用户准则，需求市场的最优均衡条件如下：

$$\rho_{jk}^{l^*}+c_{jk}^{l}(q_{jk}^{l^*})\begin{cases}=\rho_k^{l^*},\ \text{if}\ q_{jk}^{l^*}>0,\\ \geqslant\rho_k^{l^*},\ \text{if}\ q_{jk}^{l^*}=0\end{cases}\tag{7}$$

$$d_k^l(\rho_3^{l^*})\begin{cases}\leqslant\sum_{j=1}^{n}q_{jk}^{l^*},\ \text{if}\ \rho_k^{l^*}=0,\\ =\sum_{j=1}^{n}q_{jk}^{l^*},\text{if}\ \rho_k^{l^*}>0\end{cases}\tag{8}$$

式(7)表明当需求市场处于均衡状态时,消费者从零售商购买商品,其需求价格应大于消费者所付出的交易成本与产品零售价格之和;若小于该值,则消费者将拒绝购买。式(8)表明若需求市场处于均衡状态且需求价格为正数,那么需求市场中消费者购买的产品数量总和与需求数量是相等的。在逆向供应链中,需求市场是再制造产品的资源地。当回收中心支付较低价格进行回收时,需求市场的消费者就会拒绝回收,并选择自行利用这些产品[10]。

$$\begin{cases}a_k^{lR}(\boldsymbol{Q}_2^*)+c_{jk}^{lR}(q_{jk}^{lR^*})\begin{cases}=\rho_{jk}^{lR^*}, & \text{if}\ q_{jk}^{lR^*}>0\\ \geqslant\rho_{jk}^{R^*}, & \text{if}\ q_{jk}^{lR^*}=0\end{cases}\\ \text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o}q_{jk}^{lR}\leqslant\lambda_k^l\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o}q_{jk}^{l}\\ j=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots,o;l=1,2,\cdots,s\end{cases}\tag{9}$$

式中:$a_k^{lR}=a_k^{lR}(\boldsymbol{Q}_2)$ 为需求市场 k 的意愿回收函数;λ_k^l 为需求市场 k 产品 l 的可回收产品比例系数。

$$\begin{cases}\max P_k=\max\sum_{l=1}^{s}d_k^l(\rho_3^l)\rho_k^l-\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\rho_{jk}^l q_{jk}^l+\\ \sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\rho_{jk}^{lR}q_{jk}^{lR}-\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}a_k^{lR}(Q_2)q_{jk}^{lR}-\\ \sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}c_{jk}^l(q_{jk}^l)-\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}c_{jk}^{lR}(q_{jk}^{lR})\\ \text{s.t.}\ d_k^l(\rho_{jk}^l)=\sum_{j=1}^{n}q_{jk}^l;\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o}q_{jk}^{lR}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o}\lambda_k^l q_{jk}^l\\ j=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots,o;l=1,2,\cdots,s\end{cases}\tag{10}$$

所有需求市场同时达到最优的条件等同于以下变式不等式问题的解,即所求 $(\boldsymbol{Q}_2^*,\boldsymbol{\rho}_3^*,\boldsymbol{\gamma}_4^*)^{\mathrm{T}}\in R_+^{2nos+os+os}$ 满足均衡时,式(7)~式(9)对于每个需求市场都必须满足,且与如下变分不等式问题是等价的,即求解 $(\boldsymbol{Q}_2^*,\boldsymbol{\rho}_3^*,\boldsymbol{\gamma}_4^*)^{\mathrm{T}}\in R_+^{2nos+os+os}$ 满足

$$\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o}[\rho_{jk}^{l^*}+c_{ij}^{lR}(q_{jk}^{lR})-\rho_k^{l^*}-\lambda_k^l\gamma_{4k}^l]\times[q_{jk}^l-q_{jk}^{l^*}]+\sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{o}\Big[\sum_{j=1}^{n}q_{jk}^{l^*}-d_k^l(\rho_k^{l^*})\Big]\times[\rho_k^l-\rho_k^{l^*}]+\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o}[a_k^{lR}(\boldsymbol{Q}_2^*)+c_{jk}^{lR}(q_{jk}^{lR^*})-\rho_{jk}^{lR^*}+\gamma_{4k}^{l^*}]\times[q_{jk}^{lR}-q_{jk}^{lR^*}]+\sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{o}\sum_{j=1}^{n}[\lambda_k^l q_{jk}^{l^*}-q_{jk}^{lR^*}]\times[\gamma_{4k}^l-\gamma_{4k}^{l^*}]\geqslant 0,$$

$$\forall\ (\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{\rho}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)^{\mathrm{T}}\in R_+^{2nos+os+os}。\tag{11}$$

式中:γ_{4k}^l 为式(9)中约束相关联的拉格朗日乘子;$\boldsymbol{\gamma}_4$ 为所有拉格朗日乘子的 os 维行向量。

1.4 绿色闭环供应链网络均衡条件

绿色闭环供应链的均衡状态是如下的一种状态,其中不同层次的决策者之间的产品流一致,并且产品流和价格满足最优性条件,即满足变分不等式(4)、式(6)和式(11)以及总和。故将变分不等式(4)、式(6)和式(11)求和得到整个绿色闭环供应链的网络均衡条件:求解 $(\boldsymbol{Q}^{N^*},\boldsymbol{Q}_1^*,\boldsymbol{Q}_2^*,\boldsymbol{\rho}_3^*,\boldsymbol{\gamma}_1^*,\boldsymbol{\gamma}_2^*,\boldsymbol{\gamma}_3^*,\boldsymbol{\gamma}_4^*)^{\mathrm{T}}\in R_+^{ms+2mns+2nos+os+ms+ns+ns+os}$,满足

$$\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big[\frac{\partial c_{ij}^l(q_{ij}^{l^*},q_{ij}^{lR^*})}{\partial q_{ij}^1}+\frac{\partial c_j(Q_1^*)}{\partial q_{ij}^l}+\omega_i^l\frac{\partial b_{ij}^l(q_{ij}^{l^*},q_{ij}^{lR^*})}{\partial q_{ij}^{l^*}}+\gamma_{1i}^{l^*}-\gamma_{2j}^{l^*}\Big]\times[q_{ij}^l-q_{ij}^{l^*}]+$$

$$\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Bigg\{\frac{\partial f_i^l\Big(q_i^{lN^*},\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^{lR^*}\Big)}{\partial q_{ij}^{lR}}+\frac{\partial c_{ij}^l(q_{ij}^{l^*},q_{ij}^{lR^*})}{\partial q_{ij}^l}+\omega_i\Bigg[\frac{\partial a_i^l\Big(q_i^{lN^*},\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^{lR^*}\Big)}{\partial q_{ij}^{lR^*}}+\frac{\partial b_{ij}^l(q_{ij}^{l^*},q_{ij}^{lR^*})}{\partial q_{ij}^{lR}}\Bigg]+\frac{\partial c_j(Q_1^*)}{\partial q_{ij}^{lR}}-\beta_i^{lR}\gamma_{1i}^{l^*}+\gamma_{3j}^{l^*}\Bigg\}\times[q_{ij}^{lR}-q_{ij}^{lR^*}]+$$

$$\sum_{l=1}^{s}\sum_{i=1}^{m}\Bigg[\rho_i^{lN^*}+\frac{\partial f_i^l\Big(q_i^{lN^*},\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^{lR^*}\Big)}{\partial q_i^{lN^*}}+\omega_i^l\frac{\partial a_i^l\Big(q_i^{lN^*},\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^{lR^*}\Big)}{\partial q_i^{lN^*}}-\beta_i^{lN}\gamma_{1i}^{l^*}\Bigg]\times[q_i^{lN}-q_i^{lN^*}]+$$

$$\sum_{l=1}^{s}\sum_{i=1}^{m}\Big[\beta_i^{N}q_i^{lN^*}+\sum_{j=1}^{n}\beta_i^{R}q_{ij}^{lR^*}-\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^{l^*}\Big]\times[\gamma_{1i}^l-\gamma_{1i}^{l^*}]+$$

$$\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o}[\gamma_{2j}^{l^*}+c_{jk}^l(q_{jk}^{l^*})-\rho_k^{l^*}-\lambda_k^l\gamma_{4k}^{l^*}]\times[q_{jk}^l-q_{jk}^{l^*}]+\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o}[a_k^{lR}(\boldsymbol{Q}_2^*)+c_{jk}^{lR}(q_{jk}^{lR^*})+\gamma_{4k}^{l^*}-\gamma_{3j}^{l^*}]\times[q_{jk}^{lR}-q_{jk}^{lR^*}]+$$

$$\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\Big[\sum_{i=1}^{m}q_{ij}^{l^*}-\sum_{k=1}^{o}q_{jk}^{l^*}\Big]\times[\gamma_{2j}^l-\gamma_{2j}^{l^*}]+$$

$$\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{o}q_{jk}^{lR^*}-\sum_{i=1}^{m}q_{ij}^{lR^*}\Big]\times[\gamma_{3j}^l-\gamma_{3j}^{l^*}]+$$

$$\sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{o}\left[\sum_{j=1}^{n}q_{jk}^{l^*}-d_k^l(\rho_k^{l^*})\right]\times[\rho_k^l-\rho_k^{l^*}]+$$
$$\sum_{l=1}^{o}\sum_{k=1}^{o}\sum_{j=1}^{n}[\lambda_k^l q_{jk}^{l^*}-q_{jk}^{lR^*}]\times[\gamma_{4k}^l-\gamma_{4k}^{l^*}],$$
$$\forall(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{N}},\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{\rho}_3,\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,$$
$$\boldsymbol{\gamma}_4)^{\mathrm{T}}\in R_{+}^{ms+2mns+2nos+os+ms+ns+ns+os}。\qquad(12)$$

在变分不等式(12)解存在且唯一的前提下，可用修正投影算法求得其以及所对应绿色闭环供应链网络的解。

模型中设计的交易价格 ρ_{ij}^l、ρ_{ij}^{lR}、ρ_{jk}^l、ρ_{jk}^{lR} 都是内生变量，由网络结构决定。

由式(4)、式(6)可知，若 $\rho_{ij}^{l^*}$，$\rho_{ij}^{lR^*}>0$，则

$$\rho_{ij}^{l^*}=\frac{\partial c_{ij}^l(q_{ij}^{l^*},q_{ij}^{lR^*})}{\partial q_{ij}^l}+\omega_i^l\frac{\partial b_{ij}^l(q_{ij}^{l^*},q_{ij}^{lR^*})}{\partial q_{ij}^l}+$$
$$\gamma_{1i}^{l^*}=\gamma_{2j}^{l^*}-\frac{\partial c_j^l(Q_1^*)}{\partial q_{ij}^l};$$
$$\rho_{ij}^{lR^*}=\beta_i^{lR}\gamma_{1i}^{l^*}-\frac{\partial f_i^l(q_i^{lN^*},q_{ij}^{lR^*})}{\partial q_{ij}^{lR}}-\frac{\partial c_{ij}^l(q_{ij}^{l^*},q_{ij}^{lR^*})}{\partial q_{ij}^l}-$$
$$\omega_i^l\left[\frac{\partial a_i^l(q_i^{lN^*},q_{ij}^{lR^*})}{\partial q_{ij}^{lR^*}}+\frac{\partial b_{ij}^l(q_{ij}^{l^*},q_{ij}^{lR^*})}{\partial q_{ij}^{lR}}\right]=$$
$$\frac{\partial c_j(q_{ij}^{l^*},q_{ij}^{lR^*})}{\partial q_{ij}^{lR}}+\gamma_{3j}^{l^*}。$$

由式(6)、式(12)可知，若 $\rho_{jk}^{l^*}$，$\rho_{jk}^{lR^*}>0$，则

$$\rho_{jk}^{l^*}=\gamma_{2j}^{l^*}=\rho_k^{l^*}-c_{jk}^l(q_{jk}^{l^*})+\lambda_k^l\gamma_{4k}^{l^*};$$
$$\rho_{jk}^{lR^*}=\gamma_{3j}^{l^*}=a_k^{lR}(Q_2^*)+c_{jk}^{lR}(q_{jk}^{lR^*})+\gamma_{4k}^{l^*}。$$

此外由式(7)、式(9)结合式(12)可以得到 $\gamma_{4k}^{l^*}=0$。

2　绿色闭环供应链网络均衡解的存在性

将上文组建立的绿色闭环供应链网络均衡问题转化为广义 Nash 均衡问题，用 $M=\{1,2,\cdots,m\}$ 表示包含所有制造商的集合，用 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 表示包含所有制零售商的集合，用 $O=\{1,2,\cdots,o\}$ 表示包含所有需求市场的集合，用 $T=M\cup N\cup O$ 表示包含供应链网络所有决策者的集合，对 $\forall i,j,k\in T$，用 K_i,K_j,K_k 表示制造商 i、零售商 j、需求市场 k 的可行策略集。每一个决策者选取一个策略，构成了一个局势，记 $K=\prod_{i=1}^{m}K_i\prod_{j=1}^{n}K_j\prod_{k=1}^{o}K_k$。下面定义各个制造商、零售商、需求市场的可行策略映射。

对制造商 i 存在可行策略映射：

$$G_i(\boldsymbol{x}_{-i}):=\{x_i=(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{N}},\boldsymbol{Q}_{1i},\boldsymbol{\rho}_{1i}):\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^l\leqslant\beta_i^{lN}q_i^{lN}+$$
$$\sum_{j=1}^{n}\beta_i^{lR}q_{ij}^{lR};\forall l=\{1,2,\cdots,s\}\}\qquad(13)$$

式中：$\boldsymbol{x}_{-i}=(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_{m+n},x_{m+n+1},\cdots,x_{m+n+o})$ 为除制造商 i 以外所有供应链决策者的决策向量；$\rho_{1i}=(\rho_{i1}^1,\rho_{i2}^1,\cdots,\rho_{in}^1,\rho_{i1}^2,\cdots,\rho_{in}^2,\cdots,\rho_{i1}^s,\cdots,\rho_{in}^s)$ 为制造商向零售商收取的产品价格向量；$\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{N}}$ 为制造商 i 所购买原材料的数量向量，是 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{N}}$ 的分量。

对零售商 j 存在可行策略映射：

$$G_j(\boldsymbol{x}_{-j}):=\{x_j=(\boldsymbol{Q}_{2j},\boldsymbol{Q}_{1j}^{\mathrm{R}},\boldsymbol{\rho}_{2j},\boldsymbol{\rho}_{2j}^{\mathrm{R}}):$$
$$\sum_{k=1}^{o}q_{jk}^l\leqslant\sum_{i=1}^{m}q_{ij}^l,\sum_{i=1}^{m}q_{ij}^{lR}\leqslant\sum_{k=1}^{o}q_{jk}^{lR};\forall l=\{1,2,\cdots,s\}\qquad(14)$$

式中：$\boldsymbol{x}_{-j}=(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_{m+j-1},x_{m+j+1},\cdots,x_{m+n},x_{m+n+1},\cdots,x_{m+n+o})$ 为零售商 j 以外所有供应链决策者的决策向量；$\boldsymbol{Q}_{1j}^{\mathrm{R}}=(q_{1j}^{1R},q_{2j}^{1R},\cdots,q_{mj}^{1R},q_{1j}^{2R},\cdots,q_{mj}^{2R},\cdots,q_{1j}^{sR},\cdots,q_{mj}^{sR})$ 为零售商 j 向各制造商出售回收商品的数量向量；$\boldsymbol{\rho}_{2j}=(\rho_{j1}^1,\rho_{j2}^1,\cdots,\rho_{jo}^1,\rho_{j1}^2,\cdots,\rho_{jo}^2,\cdots,\rho_{j1}^s,\cdots,\rho_{jo}^s)$ 为零售商 j 向各需求市场收取产品的价格向量；$\boldsymbol{\rho}_{2j}^{\mathrm{R}}=(\rho_{j1}^{1R},\rho_{j2}^{1R},\cdots,\rho_{jo}^{1R},\rho_{j1}^{2R},\cdots,\rho_{jo}^{2R},\cdots,\rho_{j1}^{sR},\cdots,\rho_{jo}^{sR})$ 为零售商 j 向各需求市场支付回收产品的价格向量。

对需求市场 k 存在可行策略映射：

$$G_k(\boldsymbol{x}_{-k}):=\{x_k=(\boldsymbol{Q}_{2k}^{\mathrm{R}},\boldsymbol{\rho}_k):\rho_k^l\geqslant 0,$$
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o}q_{jk}^{lR}\leqslant\lambda_k^l\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o}q_{jk}^l;\forall l=\{1,2,\cdots,s\}\qquad(15)$$

式中：$\boldsymbol{x}_{-k}=(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_{m+n},x_{m+n+1},\cdots,x_{m+n+k-1},x_{m+n+k+1},\cdots,x_{m+n+o})$ 为需求市场 k 以外所有供应链决策者的决策向量；$\boldsymbol{\rho}_k=(\rho_k^1,\rho_k^2,\cdots,\rho_k^s)$ 为需求市场需求价格的价格向量；$\boldsymbol{Q}_{2k}^{\mathrm{R}}=(q_{1k}^{1R},q_{2k}^{1R},\cdots,q_{nk}^{1R},q_{1k}^{2R},\cdots,q_{nk}^{2R},q_{1k}^{3R},\cdots,q_{nk}^{sR})$ 为需求市场 k 向各零售商售出回收商品的数量向量。

绿色闭环供应链网络均衡问题转化为广义 Nash 均衡问题就是：寻找。$x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_m^*,x_{m+1}^*,\cdots,x_{m+n}^*,x_{m+n+1}^*,,\cdots,x_{m+n+o}^*)\in K$ 满足：$\forall i\in M$，$x_i^*\in G_i(x_{-i}^*)$；$\forall j\in N$，$x_j^*\in G_j(x_{-j}^*)$；$\forall k\in O$，$x_k^*\in G_k(x_{-k}^*)$，使得有

$$P_i(x_i^*,x_{-i}^*)=\max_{y_i\in G_i(x_{-i}^*)}P_i(y_i,x_{-i}^*);$$
$$P_j(x_j^*,x_{-j}^*)=\max_{y_j\in G_j(x_{-j}^*)}P_j(y_j,x_{-j}^*);$$
$$P_k(x_k^*,x_{-k}^*)=\max_{y_k\in G_k(x_{-k}^*)}P_k(y_k,x_{-k}^*)。$$

则 x^* 称为 Nash 均衡点。通常一个广义 Nash 均衡问题可以表示为 $\Gamma=\{P_t,G_t\}_{t\in T}$，简记为 $\Gamma=\{P,G\}$。

对一个广义 Nash 均衡问题 $\Gamma=\{P_t,G_t\}_{t\in T}$，有最佳回应映射 $H:K\longrightarrow 2^K$，被定义为

$$H(x)=\prod_{i\in M}H_i(x_{-i})\prod_{j\in N}H_j(x_{-j})\prod_{k\in O}H_k(x_{-k}) \tag{16}$$

式中:$H_i(x_{-i})=\{z_i\in G_i(x_{-i}):P_i(z_i,x_{-i})\geqslant P_i(y_i,x_{-i}),\forall y_i\in G_i(x_{-i})\}$;$H_j(x_{-j})=\{z_j\in G_j(x_{-j}):P_j(z_j,x_{-j})\geqslant P_j(y_j,x_{-j}),\forall y_j\in G_j(x_{-j})\}$;$H_k(x_{-k})=\{z_k\in G_k(x_{-k}):P_k(z_k,x_{-k})\geqslant P_k(y_k,x_{-k}),\forall y_k\in G_k(x_{-k})\}$。

不难看出,若 x^* 是绿色闭环供应链网络问题所对应的广义 Nash 均衡问题 $\Gamma=\{P_t,G_t\}_{t\in T}$ 的一个 Nash 均衡点,其充分必要条件为 x^* 是其最佳回应映射 $H(x)$ 的不动点。

为证明绿色闭环供应链网络问题均衡解是否存在,证明过程中需要用到如下 3 个引理与一个定理。

引理 1[11]:广义 Nash 均衡问题 $\Gamma=\{P_t,G_t\}_{t\in T}$,如果对 $\forall i\in T$ 满足:①可行策略映射 G_t、在 K_{-t} 上是连续且具凸紧值;②利润函数 $P_t(\cdot)$ 在 K 上是连续的;③对 $\forall x_{-t}\in K_{-t}$,利润函数 $P_t(\cdot,x_{-t})$ 是拟凹的。那么,其最佳回应映射 $H(x)$ 是上半连续且具凸紧值。

引理 2 (Fan-Glicksberg 不动点定理)[12-13]:设 X 是 Huasdorff 局部凸线性拓扑空间,$K\subset X$ 是一个非空凸紧集,集值映射 $F:K\longrightarrow 2^K$ 满足:$\forall x\in K$,$F(x)$ 在 X 上是上半连续的具有非空凸紧值,则存在 $x^*\in K$,使 $x^*\in F(x^*)$。

结合引理 1 与引理 2,可以得到绿色闭环供应链网络问题所对应的广义 Nash 均衡问题 Γ 的最佳回应映射 $H(x)$ 存在不动点,即绿色闭环供应链网络问题至少存在一个均衡解。

引理 3[14]:设 X,Y 是两个 Hausdorff 拓扑空间,且 Y 是紧空间,如果集值映射 $G:X\longrightarrow 2^Y$ 是闭的,集值映射 $F:X\longrightarrow 2^Y$ 是上半连续具紧值的,对 $\forall x\in X,G(x)\cap F(x)\neq\varnothing$,则集值映射 $G(x)\cap F(x)$ 在 X 上是上半连续的且具紧值。

定理 1:设 X,Y 是两个 Hausdorff 空间,$G:X\longrightarrow 2^Y$ 是一个集值映射,满足:$\forall x\in X,G(x)$是紧集,则 G 在 x 处是下半连续的,当且仅当 $\forall\varepsilon>0$,存在 x 的开邻域 $O(x)$,使 $\forall x\in O(x)$,有 $G(x)\subset U[G(x'),\varepsilon]$。

证明:本文仅证明定理的充分性。对 Y 中的开集 V,$V\cap G(x)\neq\varnothing$,取 $y\in V\cap G(x)$,因 V 是开集,存在 $\varepsilon_0>0$,使得 $U(y,\varepsilon_0)\subset V$,对此 ε_0,存在 x 的开邻域 $O(x)$,有 $G(x)\subset U[G(x'),\varepsilon_0]$,因此 $U(y,\varepsilon_0)\cap G(x')\neq\varnothing$,从而 $V\cap F(x')\neq\varnothing$,即 G 在 $x\in X$ 处是下半连续的。

证毕。

下面给出绿色闭环供应链网络问题均衡解的存在性结果。

定理 2:若绿色闭环供应链网络问题的可行集 K 是 Hausdorff 局部凸空间 X 中的非空凸紧集,且各制造商、零售商与需求市场的生产、交易、储藏、展示、回收意愿函数都是连续凸函数,则其所对应的广义 Nash 均衡问题至少存在一个 Nash 均衡点,即绿色闭环供应链网络问题存在至少一个均衡解。

证明:第一步先证明其任意可行策略映射 G_i、G_j、G_k 分别在 K_{-i}、K_{-j}、K_{-k} 上是连续且具凸紧值。

不妨构建一个集值映射:对 $\forall x_{-i}\in K_{-i}$,$F(x_{-i})=K_i$。显然,集值映射 F 是上半连续且具紧值,$F(x_{-i})\cap G_i(x_{-i})=G_i(x_{-i})$。由引理 3 知,只需要证明集值映射 G_i 是闭的,即需证明 G_i 的图 graph(G_i)在 K 上是闭的,其中

$$\mathrm{graph}(G_i)=\{(x_{-i},x_i)\in K:x_i\in G_i(x_{-i})\}。$$

设 (x_{-i}^n,x_i^n) 是 graph(G_i) 中的任意序列,满足:$(x_{-i}^n,x_i^n)\longrightarrow(x_{-i}^0,x_i^0)\in K$。现需证:$x_i^0\in G_i(K_{-i}^0)$,即若 $i\in M$,则对 $\forall l=\{1,2,\cdots,s\}$,都有 $\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^l\leqslant\beta_i^{\mathrm{N}}q_i^{l\mathrm{N}}+\sum_{j=1}^{n}\beta_i^{\mathrm{R}}q_{ij}^{l\mathrm{R}}$ 成立。

反证法,如果上述结论不成立。则有 $i\in M$,若 $x_i^0\notin G_i(K_{-i}^0)$,存在 l,有 $\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^{l^0}\geqslant\beta_i^{\mathrm{N}}q_i^{l\mathrm{N}^0}+\sum_{j=1}^{n}\beta_i^{\mathrm{R}}q_{ij}^{l\mathrm{R}^0}$ 成立,那么就存在正整数 N,当 $t\geqslant N$ 时,则有 $\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^{l^t}\geqslant\beta_i^{\mathrm{N}}q_i^{l\mathrm{N}^t}+\sum_{j=1}^{n}\beta_i^{\mathrm{R}}q_{ij}^{l\mathrm{R}^t}$,这与 $x^t\in G_i(K_{-i}^t)$ 矛盾。

所以 $x_i^0\in G_i(x_{-i}^0)$。对 $\forall i\in M$,可行策略映射 G_i 是上半连续且具紧值。

同理可证得,对 $\forall j\in N$,可行策略映射 G_j 是上半连续且具紧值;对 $\forall k\in o$,可行策略映射 G_j 是上半连续且具紧值。

由上可知 $G_i(x_{-i})$ 是紧的,根据定理 1,$\forall i\in M$,需证 $\forall\varepsilon>0$,存在 x 的开邻域$O(x)$,使 $\forall x\in O(x)$,有 $G(x)\subset U[G(x'),\varepsilon]$。

对 $i\in M$,$\forall\varepsilon>0$,只要 $\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}[(q_{ij}^l-q'^l_{ij})^2+(q_i^{l\mathrm{N}}-q_i^{l\mathrm{N}'})^2]<\varepsilon$,都有 $G_i(x_{-i'})\subset U[G_i(x_{-i'}),\varepsilon]$ 成立。

同理可证得，对 $\forall j \in N$，可行策略映射 G_j 是下半连续的；对 $\forall k \in o$，可行策略映射 G_j 是下半连续的。

综上可得可行策略映射 G_i、G_j、G_k 分别在 K_{-i}、K_{-j}、K_{-k} 上是连续的。

对 $\forall i \in M$，$\forall j \in N$，$\forall k \in O$；显然有 $\forall x'_i, x''_i \in G_i(x_{-i})$，$\lambda x'_i + (1-\lambda)x''_i \in G_i(x_{-i})$ 成立（其中 $\lambda \in [0,1]$），显然有 $\forall x'_j, x''_j \in G_j(x_{-j})$，$\lambda x'_j + (1-\lambda)x''_j \in G_j(x_{-j})$ 成立，显然有 $\forall x'_k, x''_k \in G_k(x_{-k})$，$\lambda x'_k + (1-\lambda)x''_k \in G_k(x_{-k})$ 成立，故可行策略映射 G_i、G_j、G_k 分别在 K_{-i}、K_{-j}、K_{-k} 上是具凸值的。

绿色闭环供应链网络问题满足引理 1 的条件①。

第 2 步需证供应链网络问题中任意决策者的利润函数 P_i、P_j、P_k 在 K 上是连续的。这由二元函数 $z = xy(x, y \geqslant 0)$ 的连续性，各个成本函数的连续性，再结合连续函数的四则运算法则可知，利润函数 P_i、P_j、P_k 在 K 上是连续的。

绿色闭环供应链网络问题满足引理 1 的条件②。

第 3 步需验证对 $\forall x_{-i} \in K_{-i}$，$P_i(\cdot, x_{-i})$ 是拟凹的，即需证固定任意的 $x_{-i} \in K_{-i}$，对 $\forall x'_i, x''_i \in K_{-i}$，$P_i(\lambda x_i' + (1-\lambda)x_i'', x_{-l}) \geqslant \min\{P_i(x_i', x_{-i}), P_i(x_i'', x_{-i})\}$。由于个成本函数都是关于其自变量的连续凸函数，因此对 $\forall x'_i, x''_i \in K_{-i}$ 有

$$
\begin{aligned}
&P_i[\lambda x'_i + (1-\lambda)x''_i, x_{-i}] = \sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}[\lambda\rho^{l\prime}_{ij} + \\
&(1-\lambda)\rho^{l\prime\prime}_{ij}][\lambda q^{l\prime}_{ij} + (1-\lambda)q^{l\prime\prime}_{ij}] - \rho^{l\mathrm{N}}[\lambda q_i^{l\mathrm{N}'} + \\
&(1-\lambda)q_i^{l\mathrm{N}''}] - \sum_{l=1}^{s} f_i^l[\lambda q_i^{l\mathrm{N}'} + (1-\lambda)q_i^{l\mathrm{N}''}, q_{ij}^{l\mathrm{R}}] - \\
&\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^l[\lambda q^{l\prime}_{ij} + (1-\lambda)q^{l\prime\prime}_{ij}, q^{l\mathrm{R}}_{ij}] - \\
&\omega_i^l\Big\{\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} a_i^l[\lambda q_i^{l\mathrm{N}'} + (1-\lambda)q_i^{l\mathrm{N}''}, q_{ij}^{l\mathrm{R}}] + \\
&\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^l[\lambda q^{l\prime}_{ij} + (1-\lambda)q^{l\prime\prime}_{ij}, q_{ij}^{l\mathrm{R}}]\Big\} \geqslant \\
&\lambda P_i(x'_i, x_{-i}) + (1-\lambda)P_i(x''_i, x_{-i}) \geqslant \\
&\min\{P_i(x_i', x_{-i}), P_i(x_i'', x_{-i})\}。
\end{aligned}
$$

故对 $\forall x_{-i} \in K_{-i}$，利润函数 $P_i(\cdot, x_{-i})$ 是拟凹的。

同理 $\forall x_{-j} \in K_{-j}$，利润函数 $P_j(\cdot, x_{-j})$ 是拟凹的，$\forall x_{-k} \in K_{-k}$，利润函数 $P_k(\cdot, x_{-k})$ 是拟凹的。

因此，绿色闭环供应链网络问题满足引理 1 的条件③。

由引理 1 知，最佳回应映射 $H(x)$ 是上半连续且具凸紧值的，再结合引理 2（Fan－Glicksberg 不动点定理），$H(x)$ 存在不动点，故广义 Nash 均衡问题 Γ 至少存在一个 Nash 均衡点，即绿色闭环供应链网络问题 Γ 至少存在一个均衡解。

证毕。

3　结语

首先构建了一个由制造商、零售商和需求市场组成的由零售商负责可再制造产品回收，且在生产、运输环节考虑了废弃物排放的多产品绿色闭环供应链网络模型。利用非线性均衡理论以及变分不等式的方法，给出了绿色闭环供应链网络问题各层决策者对应的变分不等式以及多准则网络均衡条件，并将绿色闭环供应链网络均衡问题转化为广义 Nash 均衡问题，利用集值映射的连续性与 Fan-Glicksberg 不动点定理，给出了在各成本函数都为连续凸函数条件下的绿色闭环供应链网络问题解的存在性定理。虽然本文研究了绿色闭环供应链网络均衡问题解的存在性，取得了一些成果，但仍然存在许多不足有待进一步地讨论研究。结合本文的研究工作，未来可在以下两方面进一步开展研究。

（1）本文给制造商的废弃物排放赋予一个非负权重，将一个双目标均衡问题转为单目标均衡问题。但往往很多实际均衡问题都具有多个目标，并不能像本文一样赋予一个非负权重转化为单目标。因此，多目标对于绿色闭环供应链网络均衡问题系统的研究仍可以作为新的研究方向。

（2）动态规划是求解决策过程最优化的数学方法，主要用于求解以时间为划分周期的动态过程优化问题。当前供应链网络均衡优化研究成果大多都是静态条件的结果，尤其是连续动态规划下的均衡优化领域更是一个盲区，而决策跨周期是目前大部分供应链网络的特征之一，具有强烈现实性。可以依据供应链网络经营特点将规划周期划分为若干个互相区分但又相互影响的阶段，采用离散或连续动态规划的思想及方法，对本文的绿色闭环供应链网络进行拓展，进一步得到绿色闭环供应链网络长期均衡的规律。

参考文献

[1]　DAFERMOS S. Isomorphic multiclass spatial price and multimodal traffic network equilibrium models[J]. Regional Science & Urban Economics, 1986, 16(2):

197-209.

[2] NAGURNEY A. Migration equilibrium and variational inequalities[J]. Journal of Computational & Applied Mathematics, 1989, 31(1): 109-112.

[3] NAGURNEY A. Network economics: a variational approach[M]. Second and Revised Edition. The Netherlands: Kluwer Academic Publishing Limited, 1999: 3-28.

[4] NAGURNEY A, DONG J, ZHANG D. A supply chain network equilibrium model[J]. Transportation Research, Part E: Logistics & Trans-portation Review, 2002, 38 (5): 281-303.

[5] REDDY K N, KUMAR A, BALLANTYNEE E F. A three-phase heuristic approach for reverse logistics network design incorporating carbon footprint[J]. International Journal of Production Research, 2019, 57(19): 6090-6114.

[6] VALDERRAMA C V, SANTIBANEZ-GONZALEZ E, PIMENTEL B, et al. Designing an environmental supply chain network in the mining industry to reduce carbon emissions[J]. Journal of Cleaner Production, 2020, 254: 119688.

[7] 顾秋阳，琚春华，吴功兴. 考虑碳排放量与数量折扣的闭环供应链网络设计与多目标决策优化研究[J]. 控制理论与应用，2021，38(3)：349-363.

[8] 张桂涛，矿钦，赵欣语，等. 碳配额交易体系下闭环供应链网络的生产与碳交易策略研究[J]. 中国管理科学，2021，29(1)：97-108.

[9] 杨玉香，张宝友，孟丽君，等. 基于环境责任的闭环供应链网络多准则决策均衡问题[J]. 系统管理学报，2014，23(1)：13-20.

[10] HAMMOND D, BEULLENS P. Closed-loop supply chain network equilibrium under legislation[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 183: 895-908.

[11] 林志. 非线性均衡理论及其研究[M]. 重庆：重庆出版社，2016.

[12] FAN K. Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear space[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1952, 38: 121-126.

[13] GLICKSBERG I L. A further generalization of the Kakutani fixed point the crem with applications to Nash equilibrium points[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1952(3): 170-174.

[14] AUBIN J P, EKELAND I. Applied nonlinear analysis [M]. New York: John Wiley & Sons, 1984: 110-111.

Existence of Green Closed-loop Supply Chain Network Solutions from a Generalized Nash Equilibrium Perspective

XU Jialei, LIN Zhi

(Mathematics and Statistics School, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: To study the examines the existence and equilibrium conditions for green closed-loop supply chain network solutions, the equilibrium conditions of the green closed-loop supply chain network are investigated by using the knowledge related to variational inequalities. Then the set-value mapping of the feasible strategies of each decision maker is constructed, and the green closed-loop supply chain network equilibrium problem is transformed into a generalized Nash equilibrium problem, which is investigated by using immovable point theorem in combination with the continuity, convexity, and tightness of the set-value mapping. Based on the conclusions, the variational inequalities corresponding to the decision makers at each level of the green closed-loop supply chain network, as well as the multicriteria network equilibrium conditions, and the existence theorem for the solutions of the green closed-loop supply chain network are given.

Keywords: green closed-loop supply chain; generalized Nash equilibrium; set-valued mapping; upper semi-continuous; lower semi-continuous; proposed concavity