直觉模糊多目标证券投资组合决策

张倩生，李锦云

（广东外语外贸大学数学与统计学院，广州 510006）

摘要： 针对证券投资产品收益的直觉模糊不确定性，运用直觉模糊数来弹性评估投资产品预期收益，并通过直觉模糊可能性均值和方差来度量投资组合收益和风险。接着基于投资组合收益最大和风险最小及信息熵最小等多个目标构建一个新的直觉模糊投资组合决策模型，进而再运用线性加权方法将其转化为单目标模型来快速获取最优投资组合策略。最后通过真实股票投资实例表明该投资组合模型方法的有效性，且投资者可根据不同目标偏好适时调整优化投资策略。

关键词： 直觉模糊数；多目标投资组合；均值；方差；熵

中图分类号： F222；F224 **文献标志码：** A **文章编号：** 1671－1807(2024)05－0026－06

诺贝尔得主 Markowitz 在 1952 年开创性地提出了均值-方差投资组合模型，为现代金融管理奠定坚实基础。在此之后，国内外学者相继拓展了各经典投资组合模型，如均值-半方差、均值-绝对方差、均值-方差-偏度模型等。但传统投资组合模型往往根据历史投资数据样本均值来估计投资产品预期收益，而且各投资产品协方差风险计算量大。在实际证券投资过程中由于投资数据信息的不完备和投资者不确定心理情绪的影响，投资产品的预期收益往往是模糊不确定的[1-2]，传统投资组合模型显得力不从心，因此国内外很多学者分别探究了模糊不确定环境下的投资组合模型[3-6]。近年来，由于直觉模糊数含有真、假隶属度和犹豫度，比模糊数更能弹性刻画不确定性信息，被广泛应用到多属性决策[7-8]和投资组合决策领域。例如，张宇卓和丁晓松[9]采用直觉模糊混合熵来度量投资组合风险的不确定程度，并给出投资组合的风险度量模型；Zhou 和 Xu[10]研究了带多个直觉模糊属性的投资组合选择问题；陈国华等[11]通过最大化投资组合收益均值、方差和偏度目标的真隶属度，并最小化这 3 个目标的假隶属度构建了直觉模糊规划投资组合模型；Deng 和 Pan[12]、Gupta 等[13]也分别通过最大化投资组合收益均值、方差、偏度和熵目标的真隶属度，最小化这 4 个目标的假隶属度构建了一种多目标直觉模糊投资组合规划模型；Yu 等[14]通过将多个投资目标的真隶属度和犹豫度加权函数构建了一个新的直觉模糊多目标组合规划模型；Gupta 等[15]基于终端财富最大化和累积风险最小化目标探究了乐观和悲观两个场景下的多期直觉模糊投资组合优化模型。上述已有文献只是将投资组合多个目标函数直觉模糊化，然后将投资组合问题转化为求解使得各目标真隶属度最大化和假隶属度最小化的多目标规划模型来获取最优投资组合策略，它们处理的投资产品收益数据还是精确的或者模糊数据，并不能直接处理带有直觉模糊不确定收益数据的投资组合问题。尽管孙坤杰[16]构建了针对直觉模糊收益和风险及换手率的投资组合决策模型，但并未考虑直觉模糊环境下的多目标投资组合问题。

因此，为克服上述投资组合决策模型的不足，本文采用梯形直觉模糊数来评估资产预期不确定收益，进而运用直觉模糊可能均值和方差来测度投资组合收益和风险，并用直觉模糊信息熵刻画投资组合收益的不确定性程度。进而基于投资组合收益均值最大、方差风险及直觉模糊熵最小多个目标构建一个新的直觉模糊投资组合模型，再根据投资者对各目标的偏爱权重运用线性加权方法将其转换为单目标模型。另外，为提高投资组合分散度，加入了投资比例熵和投资上下限约束条件到投资组合模型中，进而运用 Lingo 非线性优化软件快速

收稿日期： 2023-12-03

基金项目： 国家自然科学基金(12171103)

作者简介： 张倩生(1975—)，男，江西吉安人，博士，教授，研究方向为金融经济管理、投资优化；李锦云(1998—)，女，广西南宁人，硕士研究生，研究方向为金融统计。

求解最优投资组合策略。最后通过一个实际的投资案例来表明本模型的有效性,并灵敏分析投资者对不同投资目标的偏好程度对组合策略的影响变化。

1 相关预备知识

定义 1[17]:对任意的 $\lambda,\gamma\in[0,1]$,梯形直觉模糊数 $\tilde{\xi}=(a_1',a_1,a_2,a_3,a_4,a_4')$ 关于真隶属度 $\mu_{\tilde{\xi}}$ 的 λ 截集和假隶属度 $\nu_{\tilde{\xi}}$ 的 γ 截集分别定义为

$$[\tilde{\xi}]^\lambda=\{x\mid\mu_{\tilde{\xi}}(x)\geqslant\lambda\}=[\xi_1(\lambda),\xi_2(\lambda)]=[a_1+\lambda(a_2-a_1),a_4-\lambda(a_4-a_3)];$$

$$[\tilde{\xi}]^\gamma=\{x\mid\nu_{\tilde{\xi}}(x)\leqslant\gamma\}=[\xi_1(\gamma),\xi_2(\gamma)]=[a'_1+\gamma(a_2-a_1),a'_4-\gamma(a_4-a_3)]。$$

定理 1:若 $\tilde{\xi}$、$\tilde{\eta}$ 为任意两个梯形直觉模糊数,$\tilde{\xi}$ 的 λ 截集 $[\tilde{\xi}]^\lambda=[\xi_1(\lambda),\xi_2(\lambda)]$,$\gamma$ 截集 $[\tilde{\xi}]^\gamma=[\xi_1(\gamma),\xi_2(\gamma)]$,$\tilde{\eta}$ 的 λ 截集 $[\tilde{\eta}]^\lambda=[\eta_1(\lambda),\eta_2(\lambda)]$,$\gamma$ 截集 $[\tilde{\eta}]^\gamma=[\eta_1(\gamma),\eta_2(\gamma)]$,有

$$(x\tilde{\xi}+y\tilde{\eta})^\lambda=x\tilde{\xi}^\lambda+y\tilde{\eta}^\lambda=[x\xi_1(\lambda)+y\eta_1(\lambda),x\xi_2(\lambda)+y\eta_2(\lambda)];$$

$$(x\tilde{\xi}+y\tilde{\eta})^\gamma=x\tilde{\xi}^\gamma+y\tilde{\eta}^\gamma=[x\xi_1(\gamma)+y\eta_1(\gamma),x\xi_2(\gamma)+y\eta_2(\gamma)]。$$

证明:因直觉模糊数可看成上下两个模糊数的合成,故可由模糊扩张原理容易证得。

定义 2:若 $\tilde{\xi}=(a_1',a_1,a_2,a_3,a_4,a_4')$ 为一个梯形直觉模糊数,$\tilde{\xi}$ 关于真、假隶属度的 λ 截集 $[\tilde{\xi}]^\lambda=[\xi_1(\lambda),\xi_2(\lambda)]$ 和 γ 截集 $[\tilde{\xi}]^\gamma=[\xi_1(\gamma),\xi_2(\gamma)]$,则 $\tilde{\xi}$ 关于真、假隶属度的可能均值为

$$E_\mu(\tilde{\xi})=\int_0^1\lambda[\xi_1(\lambda)+\xi_2(\lambda)]\mathrm{d}\lambda=\frac{a_1+2(a_2+a_3)+a_4}{6};$$

$$E_\nu(\tilde{\xi})=\int_0^1(1-\gamma)[\xi_1(\gamma)+\xi_2(\gamma)]\mathrm{d}\lambda=\frac{a_1'+2(a_2+a_3)+a_4'}{6}。$$

定义 3:若 $\tilde{\xi}=(a_1',a_1,a_2,a_3,a_4,a_4')$ 是梯形直觉模糊数,$\tilde{\xi}$ 的可能性均值为

$$E(\tilde{\xi})=\frac{E_\mu(\tilde{\xi})+E_\nu(\tilde{\xi})}{2}=\frac{a_1'+a_1+4(a_2+a_3)+a_4+a_4'}{12}\tag{1}$$

推论 1:当 $\tilde{\xi}$ 为一个对称梯形直觉模糊数,则 $E(\tilde{\xi})=\dfrac{a_2+a_3}{2}$。

定理 2:若 $\{\tilde{\xi}_i\}_{i=1,2,\cdots,n}$ 为一个梯形直觉模糊数系列,$\tilde{\xi}_i$ 关于真、假隶属度的 λ 截集和 γ 截集分别为 $[\xi_{i1}(\lambda),\xi_{i2}(\lambda)]$ 和 $[\xi_{i1}(\gamma),\xi_{i2}(\gamma)]$,则对任意实数 $x_i\geqslant0$,有 $E(\sum_{i=1}^{n}x_i\tilde{\xi}_i)=\sum_{i=1}^{n}x_iE(\tilde{\xi}_i)$。

证明:由定义 2、定义 3 和定理 1 容易证得该结论(故省略)。

定义 4:若 $\tilde{\xi}=(a_1',a_1,a_2,a_3,a_4,a_4')$ 为一个梯形直觉模糊数,且它关于真属度的 λ 截集为 $[\xi_1(\lambda),\xi_2(\lambda)]$,关于假隶属度的 γ 截集为 $[\xi_1(\gamma),\xi_2(\gamma)]$,则 $\tilde{\xi}$ 关于真、假隶属度的可能性方差分别定义为

$$D_\mu(\tilde{\xi})=\frac{1}{2}\int_0^1\lambda[\xi_1(\lambda)-\xi_2(\lambda)]^2\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{24}[(a_4-a_1)^2+2(a_4-a_1)(a_3-a_2)+3(a_3-a_2)^2];$$

$$D_\nu(\tilde{\xi})=\frac{1}{2}\int_0^1(1-\gamma)[\xi_1(\gamma)-\xi_2(\gamma)]^2\mathrm{d}\gamma=\frac{1}{24}[(a_4'-a_1')^2+2(a_4'-a_1')(a_3-a_2)+3(a_3-a_2)^2]。$$

定义 5:若 $\tilde{\xi}=(a_1',a_1,a_2,a_3,a_4,a_4')$ 为一梯形直觉模糊数,$\tilde{\xi}$ 的可能性方差为

$$D(\tilde{\xi})=\frac{D_\mu(\tilde{\xi})+D_\nu(\tilde{\xi})}{2}=[(a_4-a_1)^2+(a_4'-a_1')^2+2(a_4-a_1)(a_3-a_2)+2(a_4'-a_1')(a_3-a_2)+6(a_3-a_2)^2]/48\tag{2}$$

定义 6:设 $\tilde{\xi}$ 和 $\tilde{\eta}$ 为两个梯形直觉模糊数,它们关于真假隶属度的 λ 截集分别为 $[\xi_1(\lambda),\xi_2(\lambda)]$ 和 $[\eta_1(\lambda),\eta_2(\lambda)]$,关于假隶属度的 γ 截集分别为 $[\xi_1(\gamma),\xi_2(\gamma)]$ 和 $[\eta_1(\gamma),\eta_2(\gamma)]$,则 $\tilde{\xi}$ 和 $\tilde{\eta}$ 关于真、假隶属度的可能性协方差为

$$\mathrm{Cov}_\mu(\tilde{\xi},\tilde{\eta})=\frac{1}{2}\int_0^1\lambda[[\xi_1(\lambda)-\xi_2(\lambda)][\eta_1(\lambda)-\eta_2(\lambda)]]\mathrm{d}\lambda;$$

$$\mathrm{Cov}_\nu(\tilde{\xi},\tilde{\eta})=\frac{1}{2}\int_0^1(1-\gamma)\{[\xi_1(\gamma)-\xi_2(\gamma)][\eta_1(\gamma)-\eta_2(\gamma)]\}\mathrm{d}\gamma。$$

定理 3:若 $\tilde{\xi}$ 和 $\tilde{\eta}$ 为两个梯形直觉模糊数,则对任何非负实数 x_1 和 x_2 有

$$D(x_1\tilde{\xi}+x_2\tilde{\eta})=x_1^2D(\tilde{\xi})+x_2^2D(\tilde{\eta})+2x_1x_2\mathrm{Cov}(\tilde{\xi},\tilde{\eta})。$$

式中:$\mathrm{Cov}(\tilde{\xi},\tilde{\eta})=[\mathrm{Cov}_\mu(\tilde{\xi},\tilde{\eta})+\mathrm{Cov}_\nu(\tilde{\xi},\tilde{\eta})]/2$。

证明:根据定义 4～定义 6 和定理 1 容易证得,故省略。

定义 7[18]:若 $\tilde{\xi}=(a_1',a_1,a_2,a_3,a_4,a_4')$ 为一个梯形直觉模糊数,$\tilde{\xi}$ 关于真、假隶属度的可信信息熵分别定义为

$$h_\mu(\tilde{\xi})=\int_{a_1}^{a_4}S[C_r(\mu_{\tilde{\xi}}=x)]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[a_4-a_3+a_2-a_1]+(a_3-a_2)\ln2;$$

$$h_\nu(\tilde{\xi}) = \int_{a_1'}^{a_4'} S[C_r(\nu_{\tilde{\xi}} = x)]\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}[a_4' - a_3 + a_2 - a_1'] + (a_3 - a_2)\ln 2。$$

式中：$S(t) = -t\ln t - (1-t)\ln(1-t), 0 \leqslant t \leqslant 1$。

定义 8：若 $\tilde{\xi} = (a_1', a_1, a_2, a_3, a_4, a_4')$ 为梯形直觉模糊数，则 $\tilde{\xi}$ 的可信信息熵定义为

$$h(\tilde{\xi}) = \frac{h_\mu(\tilde{\xi}) + h_\nu(\tilde{\xi})}{2} =$$

$$\frac{1}{4}[a_4' + a_4 - 2a_3 + 2a_2 - a_1 - a_1'] + (a_3 - a_2)\ln 2 \tag{3}$$

推论 2：若 $\{\tilde{\xi}_i = (a_{i1}', a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, a_{i4}')\}_{i=1,2,\cdots,n}$ 为一个梯形直觉模糊数系列，对任意的实数 $x_i \geqslant 0$，则有 $h(\sum_{i=1}^n x_i\tilde{\xi}_i) = \sum_{i=1}^n x_i h(\tilde{\xi}_i)$。

2 基于均值-方差-熵的直觉模糊投资组合决策方法

假设投资者打算将其初始财富 1 投资到证券市场的 n 种风险资产 $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$，x_i 为投资于资产 s_i 的资金比例。由于信息的不完备和投资者的主观经验和不确定心理情绪影响，第 i 只风险资产的未来不确定收益可用直觉模糊数 $\tilde{\xi}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 来评估，则投资组合 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的总收益也可用直觉模糊数 $\tilde{\xi} = \sum_{i=1}^n x_i\tilde{\xi}_i$ 来刻画。另外，用 $E(\tilde{\xi})$、$D(\tilde{\xi})$ 分别表示投资组合的可能性收益均值和方差风险，c_i 表示第 i 种资产的单位交易成本率。假设整个投资过程是自融资的，若假设投资者现已持有一个投资组合 $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$，通过调整资金后得到的新投资组合为 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则投资调整过程中产生的总交易成本为 $C = \sum_{i=1}^n c_i |x_i - x_i^0|$，投资组合的净收益率为 $R_{\mathrm{N}} = \sum_{i=1}^n x_i E(\tilde{\xi}_i) - \sum_{i=1}^n c_i |x_i - x_i^0|$。

对于实际证券投资者来说，总希望投资组合收益尽可能大，投资组合风险尽量小和收益不确定信息熵尽量小。因此，构建如下基于直觉模糊均值-方差-熵的投资组合模型(4)：

$$\max E(\tilde{\xi}_1 x_1 + \tilde{\xi}_2 x_2 + \cdots + \tilde{\xi}_n x_n)$$
$$\min D(\tilde{\xi}_1 x_1 + \tilde{\xi}_2 x_2 + \cdots + \tilde{\xi}_n x_n)$$
$$\min h(\tilde{\xi}_1 x_1 + \tilde{\xi}_2 x_2 + \cdots + \tilde{\xi}_n x_n)$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^n -x_i \ln x_i \geqslant \delta \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ 0 \leqslant l_i \leqslant x_i \leqslant u_i \leqslant 1 \\ i = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{4}$$

投资组合模型(4)第一条约束确保投资组合分散度不低于 δ 水平，最后两条约束则表示总共投资 n 种风险资产，每只产品 s_i 不允许卖空且存在投资规模下限 l_i 和上限 u_i。

若用梯形直觉模糊数 $\tilde{\xi}_i = (a_{i1}', a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, a_{i4}')$ 来评估第 $i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 只风险资产的不确定预期收益时，投资组合收益为

$$\sum_{i=1}^n x_i\tilde{\xi}_i = (\sum_{i=1}^n x_i a_{i1}', \sum_{i=1}^n x_i a_{i1}, \sum_{i=1}^n x_i a_{i2}, \sum_{i=1}^n x_i a_{i3}, \sum_{i=1}^n x_i a_{i4}, \sum_{i=1}^n x_i a_{i4}')。$$

根据式(1)～式(3)和定理 2、定理 3 及推论 2，并考虑交易费用成本，上面的直觉模糊投资组合决策模型(4)即可转换为如下的模型(5)：

$$\max R_{\mathrm{N}} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{a_{i1}' + a_{i1} + 4(a_{i2} + a_{i3}) + a_{i4} + a_{i4}'}{12} - \sum_{i=1}^n c_i |x_i - x_i^0|$$

$$\min D\Big(\sum_{i=1}^n x\tilde{\xi}_i\Big) = \frac{1}{48}\Big\{\Big[\sum_{i=1}^n x_i(a_{i4} - a_{i1})\Big]^2 + \Big[\sum_{i=1}^n x_i(a_{i4}' - a_{i1}')\Big]^2 + 2\Big[\sum_{i=1}^n x_i(a_{i4} - a_{i1})\Big]\Big[\sum_{i=1}^n x_i(a_{i3} - a_{i2})\Big] + 2\Big[\sum_{i=1}^n x_i(a_{i4}' - a_{i1}')\Big]\Big[\sum_{i=1}^n x_i(a_{i3} - a_{i2})\Big] + 6\Big[\sum_{i=1}^n x_i(a_{i3} - a_{i2})\Big]^2\Big\}$$

$$\min h(\sum_{i=1}^n x_i\tilde{\xi}_i) = \sum_{i=1}^n x_i\Big[\frac{1}{4}(a_{i4}' + a_{i4} - 2a_{i3} + 2a_{i2} - a_{i1} - a_{i1}') + (a_{i3} - a_{i2})\ln 2\Big]$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^n -x_i \ln x_i \geqslant \delta \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ l_i \leqslant x_i \leqslant u_i \\ i = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{5}$$

投资组合模型(5)为复杂多目标规划问题，直接求解比较困难。因此，可先在不考虑投资组合风险和收益信息熵目标情况下，求得投资组合收益的正、负理想解 $R^+ = \max R_{\mathrm{N}}$、$R^- = \min R_{\mathrm{N}}$。同理，还可分别求得投资组合风险的正、负理想解 $V^+ = \max V$、$V^- = \min V$，及投资收益不确定信息熵的正、负理想解 $H^+ = \max H$、$H^- = \min H$。接着可利用多目标线性加权方法将投资组合模型(5)转化为单目标投资组合规划模型(6)：

$$\max \omega_1 \frac{R_N - R^-}{R^+ - R^-} + \omega_2 \frac{V^+ - V}{V^+ - V^-} + \omega_3 \frac{H^+ - H}{H^+ - H^-}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} - x_i \ln x_i \geqslant \delta \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ l_i \leqslant x_i \leqslant u_i \\ i = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{6}$$

式中：ω_i 为投资者对各投资目标的偏好程度，且 $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$。则上述投资组合模型(6)可转化为如下具体模型(7)：

$$\max \omega_1 \Big[\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{a'_{i1} + a_{i1} + 4(a_{i2} + a_{i3}) + a_{i4} + a'_{i4}}{12} - \sum_{i=1}^{n} c_i \left| x_i - x_i^0 \right| - R^- \Big] \Big/ (R^+ - R^-) + \omega_2 \Big(V^+ - \frac{1}{48} \Big\{ \Big[\sum_{i=1}^{n} x_i (a_{i4} - a_{i1}) \Big]^2 + \Big[\sum_{i=1}^{n} x_i (a'_{i4} - a'_{i1}) \Big]^2 + 2 \Big[\sum_{i=1}^{n} x_i (a_{i4} - a_{i1}) \Big] \Big[\sum_{i=1}^{n} x_i (a_{i3} - a_{i2}) \Big] + 2 \Big[\sum_{i=1}^{n} x_i (a'_{i4} - a'_{i1}) \Big] \Big[\sum_{i=1}^{n} x_i (a_{i3} - a_{i2}) \Big] + 6 \Big[\sum_{i=1}^{n} x_i (a_{i3} - a_{i2}) \Big]^2 \Big\} \Big) \Big/ (V^+ - V^-) + \omega_3 \Big\{ H^+ - \sum_{i=1}^{n} x_i \Big[\frac{1}{4} (a'_{i4} + a_{i4} - 2a_{i3} + 2a_{i2} - a_{i1} - a'_{i1}) + (a_{i3} - a_{i2}) \ln 2 \Big] \Big\} \Big/ (H^+ - H^-)$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} - x_i \ln x_i \geqslant \delta \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ l_i \leqslant x_i \leqslant u_i \\ i = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{7}$$

3 直觉模糊投资组合决策模型实证分析

为验证本文提出的直觉模糊投资组合模型方法的实用性，从中国上证交易所随机选取 10 只股票做风险投资，根据样本股票 2006 年 4 月至 2023 年 10 月期间的月度历史收益数据并借鉴 Vercher 等[19]分位数统计方法用直觉模糊数来评估各候选股票产品的预期不确定收益。详细的直觉模糊收益评估值见表 1。

若已有的各证券初始投资比例为 $x_1^0 = x_2^0 = \cdots = x_{10}^0 = 0.1$，现在需要对投资组合调整以期获得最优组合策略。假设每只股票投资资金比例 x_i 的下限 l_i 为 0，上限 u_i 为 0.45，单位交易成本费率 $c_i = 0.003$，投资分散比例信息熵阈值 $\delta = 1.5$，为获得重新调整再投资的最佳投资组合，可将直觉模糊投资组合模型(7)转化成如下的模型(8)来求解调整后的最优投资组合策略。

$$\max \omega_1 \Big\{ \sum_{i=1}^{10} x_i [a'_{i1} + a_{i1} + 4(a_{i2} + a_{i3}) + a_{i4} + a'_{i4}] / 12 - \sum_{i=1}^{10} 0.003 \left| x_i - x_i^0 \right| - R^- \Big\} / (R^+ - R^-) + \omega_2 \Big(V^+ - \frac{1}{48} \Big\{ \Big[\sum_{i=1}^{10} x_i (a_{i4} - a_{i1}) \Big]^2 + \Big[\sum_{i=1}^{10} x_i (a'_{i4} - a'_{i1}) \Big]^2 + 2 \Big[\sum_{i=1}^{10} x_i (a_{i4} - a_{i1}) \Big] \Big[\sum_{i=1}^{10} x_i (a_{i3} - a_{i2}) \Big] + 2 \Big[\sum_{i=1}^{10} x_i (a'_{i4} - a'_{i1}) \Big] \Big[\sum_{i=1}^{10} x_i (a_{i3} - a_{i2}) \Big] + 6 \Big[\sum_{i=1}^{10} x_i (a_{i3} - a_{i2}) \Big]^2 \Big\} \Big) / (V^+ - V^-) + \omega_3 \Big\{ H^+ - \sum_{i=1}^{10} x_i \Big[\frac{1}{4} (a'_{i4} + a_{i4} - 2a_{i3} + 2a_{i2} - a_{i1} - a'_{i1}) + (a_{i3} - a_{i2}) \ln 2 \Big] \Big\} / (H^+ - H^-)$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{10} - x_i \ln x_i \geqslant 1.5 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 1 \\ 0 \leqslant x_i \leqslant 0.45 \\ i = 1,2,\cdots,10 \end{cases} \tag{8}$$

表 1 股票投资产品预期收益的直觉模糊评估值

序号	股票代码	股票名称	梯形直觉模糊收益率	收益	方差	直觉模糊熵
1	600000	浦发银行	(0.035 0,0.038 1,0.130 0,0.155 9,0.258 5,0.291 0)	0.207 2	0.109 8	0.277 8
2	600519	贵州茅台	(0.072 0,0.080 5,0.177 8,0.231 9,0.337 9,0.367 0)	0.208 0	0.230 6	0.216 0
3	601088	中国神华	(0.040 2,0.048 8,0.142 2,0.155 0, 0.237 6,0.262 0)	0.148 1	0.096 3	0.169 9
4	601168	西部矿业	(0.002 1,0.003 5,0.064 8,0.118 3,0.541 4,0.622 0)	0.158 5	0.814 7	0.342 3
5	600015	华夏银行	(−0.103 6,−0.100 5,0.058 2,0.106 0,0.230 1,0.244 4)	0.106 1	0.078 9	0.132 8
6	600016	民生银行	(0.031 0,0.044 0,0.104 4,0.129 9,0.198 4,0.217 0)	0.119 0	0.079 7	0.131 9
7	600019	宝钢股份	(0.000 5,0.001,0.061 1,0.099 1,0.141 7,0.163 0)	0.078 9	0.077 9	0.124 8
8	600028	中国石化	(−0.030 0,−0.057 1,0.089 9,0.122 9,0.192 1,0.210 0)	0.097 2	0.158 5	0.230 6
9	600030	中信证券	(0.010 0,0.023 6, 0.067 5,0.092 0,0.249 1,0.270 0)	0.099 2	0.145 8	0.156 5
10	601166	兴业银行	(0.085 0,0.123 2,0.162 1,0.042 4,0.232 2,0.258 0)	0.126 4	0.060 3	0.074 3

若投资者对3个投资目标有不同偏好程度，可在模型(8)中选取不同的目标权重向量 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$。当投资比例信息熵的阈值 δ 设定为1.5时，由模型(5)可求得正、负理想解 $R^+=0.1873$，$R^-=0.0893$，$V^+=0.0084$，$V^-=0.0007$，$H^+=0.1987$，$H^-=0.0767$。将它们代入到模型(8)中并运用Lingo软件可快速求解获取调整后的最优投资组合策略 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_{10})$，结果见表2。

由表2可知，随着投资者对组合收益目标偏好程度 ω_1 的取值增大，模型获取的最优投资组合的收益均值和方差都随之增大，投资组合比例也较趋分散，夏普比率也维持一个较高的水平，这符合投资学原理，也体现本模型的绩效优势。

若投资者对各投资目标的偏好程度相同 $\left(\omega_1=\omega_2=\omega_3=\frac{1}{3}\right)$ 时，可通过设定不同的投资比例熵阈值 δ，快速获取对应的最优投资组合策略，结果见表3。

表2 不同目标权重向量 $\boldsymbol{\omega}$ 下的最优投资组合策略结果

序号	股票名称	$\boldsymbol{\omega}$=(0.1,0.4,0.5)	$\boldsymbol{\omega}$=(0.2,0.5,0.3)	$\boldsymbol{\omega}$=(0.4,0.5,0.1)	$\boldsymbol{\omega}$=(0.6,0.3,0.1)	$\boldsymbol{\omega}$=(0.7,0.2,0.1)
1	浦发银行	0.003 4	0.066 3	0.450 0	0.438 8	0.420 1
2	贵州茅台	0.002 1	0.100 0	0.278 5	0.320 9	0.347 0
3	中国神华	0.034 0	0.100 0	0.084 9	0.078 3	0.075 1
4	西部矿业	0.000 0	0.000 0	0.000 9	0.012 8	0.023 4
5	华夏银行	0.240 3	0.100 0	0.028 0	0.023 8	0.021 5
6	民生银行	0.162 3	0.183 7	0.041 4	0.035 1	0.032 0
7	宝钢股份	0.228 4	0.000 0	0.010 6	0.009 9	0.008 8
8	中国石化	0.000 8	0.000 0	0.006 7	0.010 9	0.011 4
9	中信证券	0.000 9	0.000 0	0.007 3	0.011 8	0.012 3
10	兴业银行	0.327 7	0.450 0	0.091 6	0.057 8	0.048 4
组合收益		0.107 0	0.132 1	0.155 4	0.158 6	0.160 7
组合方差		0.000 8	0.000 9	0.002 7	0.003 1	0.003 3
直觉模糊熵		0.074 4	0.080 1	0.119 6	0.125 9	0.129 4
夏普比率		3.700 9	4.268 0	2.959 0	2.825 6	2.771 7

表3 不同投资分散度 $\boldsymbol{\delta}$ 下的模型最优投资组合策略结果

序号	股票名称	δ=0.8	δ=1.2	δ=1.5	δ=1.8	δ=2.0
1	浦发银行	0.450 0	0.450 0	0.401 3	0.262 6	0.253 2
2	贵州茅台	0.450 0	0.383 5	0.304 6	0.275 6	0.190 2
3	中国神华	0.000 0	0.045 1	0.096 1	0.100 0	0.115 2
4	西部矿业	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 2	0.001 6
5	华夏银行	0.000 0	0.006 9	0.034 5	0.064 3	0.090 9
6	民生银行	0.000 0	0.017 5	0.055 8	0.093 9	0.100 0
7	宝钢股份	0.000 0	0.000 3	0.007 1	0.024 7	0.055 2
8	中国石化	0.000 0	0.000 0	0.000 5	0.007 7	0.026 1
9	中信证券	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.008 0	0.027 5
10	兴业银行	0.100 0	0.096 7	0.100 0	0.163 1	0.140 3
组合收益		0.168 3	0.163 9	0.157 2	0.150 5	0.141 2
组合方差		0.003 1	0.002 9	0.002 6	0.002 1	0.002 0
直觉模糊熵		0.127 4	0.124 3	0.118 5	0.109 9	0.107 2
夏普比率		2.984 0	2.990 2	3.023 4	3.201 6	3.062 1

由表3可知，随着投资比例熵的阈值 δ 的提高，投资资金比例逐渐趋于分散在各资产，模型获取的最优投资组合收益的可能性均值和方差均在下降，这是符合投资学基本原理的。另外，当投资比例熵的阈值 δ 增大时，投资组合不确定收益的直觉模糊熵也在下降，这大大降低了不确定收益带来的风险，而且夏普比率有一定程度的提升。上述结果表明本文提出的直觉模糊多目标投资组合模型提供了一种分散式投资组合策略，且投资绩效表现良好。

4 结论

针对金融市场中投资产品预期收益和风险的不确定性，用直觉模糊数来评估投资收益，通过直觉模糊可能性均值和方差来度量投资组合预期收益和风险，进而基于投资组合收益均值最大、方差最小和信息熵最小的原则构建一个直觉模糊多目标投资组合规划模型，并且通过线性加权转化为单目标投资模型以简化求解过程。投资实证分析表明，本文提出的直觉模糊投资组合模型获取的投资策略有很好的绩效表现，而且投资者还可根据自己投资偏好态度灵活选择不同投资目标权重，快速获取相应的最优组合策略。

参考文献

[1] 张新洁，马思思. 基于模糊层次分析的高速公路零碳服务区评价[J]. 科技和产业，2023，23(3)：83-89.

[2] 达虎，肖静，张生月，等. 基于层次分析法的重点实验室绩效模糊综合评价[J]. 科技和产业，2023，23(5)：7-13.

[3] 王贞，崔轲轲，李旭飞，等. 模糊投资组合选择问题的改进帝企鹅优化算法[J]. 数学的实践与认识，2023，53(11)：164-177.

[4] 杨兴雨，陈锦桂，刘伟龙，等. 考虑投资者心理特征的模糊投资组合优化模型[J/OL]. 控制与决策，1-9[2024-01-17]https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.1540.

[5] 杨兴雨，陈思豆，刘伟龙，等. 考虑现实因素的模糊多目标投资组合策略[J]. 模糊系统与数学 2021，35(2)：76-84.

[6] 邓雪，方雯. 基于DEA博弈交叉效率和投资者心理的模糊投资组合研究[J]. 运筹与管理，2023，31(10)：68-74.

[7] 陈嘉鑫，李梅，陈洋，等. 基于梯形模糊合作伙伴选择的群体决策方法[J]. 科技和产业，2023，23(14)：21-26.

[8] 周施吉，唐孝，赵容乐，等. 基于扰动优势关系的直觉模糊三支决策方法[J]. 计算机工程与科学，2023，45(11)：2027-2035.

[9] 张宇卓，丁晓松，基于直觉模糊混合熵的投资组合风险度量模型[J]. 数学的实践与认识，2022，52(11)：256-262.

[10] ZHOU W，XU Z. Score-hesitation trade-off and portfolio selection under intuitionistic fuzzy environment [J].

International Journal of Intelligent Systems，2019，34(2)：325-341.

[11] 陈国华，廖小莲，余星. 基于直觉模糊规划的多目标投资组合选择模型[J]. 模糊系统与数学，2012，26(2)：129-135.

[12] DENG X，PAN X. The research and comparison of multi-objective portfolio based on intuitionistic fuzzy optimization [J]. Computers & Industrial Engineering，2018，124：411-421.

[13] GUPTA P，MEHLAWAT M K，YADAV S，et al. A polynomial goal programming approach for intuitionistic fuzzy portfolio optimization using entropy and higher moments[J]. Applied Soft Computing，2019，85：105781.

[14] YU G F，LI D F，LIANG D C，et al. An intuitionistic fuzzy multi-objective goal programming approach to portfolio selection [J]. International Journal of Information Technology & Decision Making，2021，20(5)：1477-1497.

[15] GUPTA P，MEHLAWAT M K，YADAV S，et al. Intuitionistic fuzzy optimistic and pessimistic multi-period portfolio optimization models [J]. Soft Computing，2020，24(16)：11931-11956.

[16] 孙坤杰. 基于Yager熵的直觉梯形模糊数投资组合模型及实证[J]. 运筹与模糊学，2019，9(2)：189-202.

[17] LI D. A ratio ranking method of triangular intuitionistic fuzzy numbers and its application to MADM problems [J]. Computers & Mathematics with Applications，2010，60(6)：1557-1570.

[18] LI P K，LIU B D. Entropy of credibility distributions for fuzzy variables [J]，IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2008，16(1)：123-129.

[19] VERCHER E，BERMÚDEZ J D，SEGURA J V. Fuzzy portfoliooptimization under downside risk measures [J]. Fuzzy Sets and Systems，2007，158 (7)：769-782.

Intuitionistic Fuzzy Multi-objective Portfolio Decision-making for Securities

ZHANG Qiansheng，LI Jinyun

(School of Mathematics and Statistics，Guangdong University of Foreign Studies，Guangzhou 510006，China)

Abstract：In order to deal with security portfolio problem with intuitionistic fuzzy return，intuitionistic fuzzy number is used to assess the uncertain return of security and employs intuitionistic fuzzy mean and variance to measure portfolio return and risk respectively firstly. A new intuitionistic fuzzy portfolio decision model is constructed with multiple objectives such as maximizing portfolio return，minimizing risk and information entropy. Then，by using a linear weighting method，the complex model is transformed into a single-objective model for solving the optimal strategy. Finally，the effectiveness of the portfolio method is demonstrated by a real stock investment numerical example，and the optimal portfolio strategy can be adjusted according to the different goal preferences of investors.

Keywords：intuitionistic fuzzy number；multi-objective portfolio；mean；variance；entropy