

基于厚尾分布模型在上证股指波动趋势上的应用

邓亚东, 王 波

(上海理工大学 管理学院, 上海 200093)

摘要:高风险高波动时期的股指收益率序列存在更为明显的厚尾现象,将残差设定为偏 t 分布的 GARCH 族模型要优于普通的正态分布以及学生 t 分布模型。以五种损失函数作为评价准则,在残差序列偏 t 分布前提下比较了 GARCH 模型、EGARCH 模型和 GJR-GARCH 模型,最后得到在高风险时期结构更为简洁的 GARCH(1,1)模型具有更好的预测效果。

关键词:厚尾分布; GARCH 模型; 波动率预测

中图分类号:F830.91 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-1807(2017)07-0157-05

如何预测证券市场波动率一直是学术研究者以及证券机构关注的问题,2015 年 6 月中旬我国股市遭遇了严重的股灾,上证综指在两个月的时间从 5 178.19 迅速跌至 2 850.71,其速度之快波幅之大让广大普通投资者以及部分风控制度严格的大型机构投资者损失惨重。因此如何准确地预测证券市场波动率又一次成为研究者关注的重点。

目前在预测金融时间序列波动性方面应用最为广泛与成熟的模型当属广义自回归条件异方差模型,以及基于其发展起来的 GARCH 族模型。GARCH 模型是由 Bollerslev 1986 年基于 ARCH 模型提出来的模型^[1],并把方差方程构造成自回归形式。1991 年 Nelson 提出了指数型 GARCH 模型,EGARCH 模型改进了 GARCH 模型方差方程的结构,并考虑到了非对称性,也就是杠杆效应^[2]。Glosten, Jaganathan 和 Runkle 提出了 GJR-GARCH 模型^[3],简化了 EGARCH 模型,而且估计了非对称效应。GARCH 模型发展到现在已经形成了不下几百种的衍生 GARCH 模型,发展成了规模庞大的 GARCH 模型族。GARCH 模型的成功应用促进了研究者对不同衍生 GARCH 模型的实际适用环境的研究。Hansen 和 Lunde 使用了 IBM 的股票价格与美元兑德国马克的汇率作为数据^[4],比较了超过 300 种 GARCH 模型的性能,他们发现 GARCH 模型的表现不能被其它任何竞争模型超越。方立兵等评估了 10 个 GARCH 模型的性能,他们认为 EGARCH 模

型和 APARCH 模型的表现更好^[5]。王天一等基于 Hansen 和 Huang 等提出的 Realized GARCH 模型^[6],进一步研究了厚尾分布下的 Realized GARCH 模型^[7],并且认为偏 t 分布下的 Realized GARCH 模型可以更加充分的拟合金融时间序列中的厚尾和偏峰情况。

在本文中,比较了 3 种常见的 GARCH 模型,并进行了向前一步预测。对于每一种 GARCH 模型本文分别考虑 4 种滞后长度组合(1,1)、(1,2)、(2,1)、(2,2)。因此本文总共分析了 12 个不同的 GARCH 模型。一般的,滞后长度 $p, q \leq 2$ 时可以捕捉到大部分的异方差性,而且更高阶的滞后模型往往会导致模型估计能力的下降,所以并不是滞后阶数越高越好。

本文使用 MATLAB 软件和 R 语言对样本进行数据分析以及滚动预测,不同于以往试图找出普适最优模型的研究,本文的研究主要集中在比较高风险高波动时期的股票指数波动率,特别是证券市场经历牛市转熊市的时期或者熊市转牛市的时期。本文另外一个不同点在于本文使用的三种 GARCH 模型的残差分布采用的都是偏 t 分布,更好地反映了实际收益率序列的厚尾性特征,使得研究结果更加贴近实际金融市场。

1 研究方法

1.1 标准 GARCH 模型

GARCH 模型在描述金融时间序列波动集聚效应方面具有独特的优势,通过图 1 所示的收益率波动

收稿日期:2017-03-17

作者简介:邓亚东(1991—),男,江西抚州人,上海理工大学管理学院,硕士研究生,研究方向:金融计量、数量经济;王波,男,江西东乡人,上海理工大学管理学院,教授,研究方向:生产运营系统管理,金融衍生品风险管理,决策分析等。

图本文可以清楚地看到上证综指的日收益率存在明显的波动集聚效应,所以使用 GARCH 模型来拟合以及预测上证综指的日收益率波动是非常合适的,以股票市场个股为例,构造简化 GARCH 模型:假定股票在第 t 天的收盘价格为 P_t ,按照对数收益率来构造股票收益率,计算公式为:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (1)$$

如果定义 σ_t 为股票收益率在第 t 天的波动率,那么收益率的样本方差为:

$$\sigma_t = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (r_{n-i} - \bar{r})^2 \quad (2)$$

其中 $\bar{r}$ 为收益率序列的均值:

$$\bar{r} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_{n-i} \quad (3)$$

在上述计算波动率的过程中,赋予了 r_t 相同的权重,但是在实际运用中,波动率与其滞后期相关程度并不一定相同,因此,GARCH 模型成为估计股票收益率波动更为可取的方法。

由于 EGARCH 模型与 GJR-GARCH 模型都是基于标准的 GRACH 模型发展起来的,因此这里本文只详细描述标准 GRACH 模型。GARCH 模型分为均值方程和方差方程两个方程,均值方程采用 ARIMA(M, N, R) 结果,即自回归积分移动平均过程:

$$r_t = C + \sum_{i=1}^M \phi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^N \beta_j X(t, j) + \epsilon_t + \sum_{k=1}^R \theta_k \epsilon_{t-k} \quad (4)$$

其中, ϕ_i 为自回归系数, θ_k 为移动平均系数, ϵ_t 为随机扰动项, r_t 表示收益率序列, $X(t, j)$ 表示解释变量矩阵。方差方程如下:

$$\sigma_t^2 = k + \sum_{i=1}^P G_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^Q A_j \epsilon_{t-j}^2 \quad (5)$$

系数矩阵约束条件如下:

$$\sum_{i=1}^P G_i + \sum_{j=1}^Q A_j < 1 \quad (6)$$

其中, $k > 0$, $G_i > 0$, $A_j > 0$; $i = 1, 2, 3, \dots, P$; $j = 1, 2, 3, \dots, Q$ 。

1.2 残差分布判断

标准的 GARCH 模型以及大多数实证研究都是基于收益率残差项 ϵ_t 服从标准的 Gaussian 分布的假设,但是实际的金融时间序列,特别是股票、股指收益率序列的残差通常都具有厚尾性。因此本文首先判断了序列的厚尾性,然后进行了相应的厚尾性处理。

为了确定残差的厚尾特性以及偏斜情况,本文对序列进行了分析,结果如图 2 所示。结果显示收益率序列存在厚尾和偏斜现象,因此正态分布对于残差的分布描述能力有限,有必要对标准 GARCH 模型进行拓展,使得残差能够容纳厚尾和偏斜这两个特征。

由于标准正态分布不能反映 ϵ_t 的厚尾性质,改变 ϵ_t 的分布对基本的 GARCH 模型进行拓展是本文研究的一大不同点,本文使用了 Hansen 在 1994 提出的 Skewed-t 分布代替了标准正态分布^[8]。使用 Skewed-t 分布的优点在于其相当灵活,Skewed-Normal 分布、t 分布、Normal 分布都是其特殊情况。Skewed-t 分布的密度函数:

$$g(z | \eta) = \begin{cases} bc \left[1 + \frac{1}{\eta-2} \left(\frac{bz+a}{1-\lambda} \right)^2 \right]^{-\frac{\eta+1}{2}}, & z < -a/b \\ bc \left[1 + \frac{1}{\eta-2} \left(\frac{bz+a}{1+\lambda} \right)^2 \right]^{-\frac{\eta+1}{2}}, & z \geq -a/b \end{cases} \quad (7)$$

其中, $2 < \eta < \infty$, $-1 < \lambda < 1$ 。

$$a = 4\lambda c(\eta-2)/(\eta-1) \quad (8)$$

$$b^2 = 1 + 3\lambda^2 - a^2 \quad (9)$$

$$c = \frac{\Gamma((\eta+1)/2)}{\sqrt{\pi(\eta-2)}\Gamma(\eta/2)} \quad (10)$$

Hansen 证明了上述分布的均值为 0,方差为 1。分布中的参数 λ 控制了 Skewed-t 分布的偏度,当 $\lambda > 0$ 时分布右偏,当 $\lambda < 0$ 时分布左偏,当 $\lambda = 0$ 时,Skewed-t 分布退化为标准 t 分布。同样的原理,自由度 η 控制了尾部的厚度,当 $\eta \rightarrow \infty$ 时,Skewed-t 分布趋向于 Skewed-Normal 分布,更进一步,此时当 $\lambda = 0$ 时,Skewed-Normal 分布退化为标准正态分布,并且有标准的尾部厚度,峰度为 3。

1.3 损失函数

本文采用现在使用非常普遍的损失函数的方法来检验不同模型的样本外预测能力。损失函数是一种波动模型预测能力的评价指标体系,通常损失函数的值越小,表明波动预测的误差就越小,那么模型的预测精度就越高。目前使用普遍的损失函数主要有: MAE、RMSE、MAPE、HRSME 和 HMAE 等。因此,本文计算了上述所有 GARCH 模型的五种损失函数来衡量他们的样本外预测能力。五种损失函数的数学形式为:

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |h_t - \sigma_t|$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (h_t - \sigma_t)^2}$$

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left| 1 - \sqrt{h_t \sigma_t} \right|$$
$$HRSME = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(1 - \frac{\sigma_t}{h_t} \right)^2}$$
$$HMAE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left| 1 - \frac{\sigma_t}{h_t} \right|$$

1. 4 模型估计与预测

本文关注三个 GARCH 族模型:标准 GARCH 模型,EGARCH 模型以及 GJR-GARCH 模型。对于每一种 GARCH 模型,本文都考虑四种滞后结构:(1,1)、(1,2)、(2,1)、(2,2),因此本文共分析了十二个 GARCH 模型。

由文献资料可知,单个损失函数没法准确地衡量出最优模型,所以本文选择使用五种损失函数来衡量上述不同模型的预测准确度,从而选择出最优的 GARCH 模型。

本文使用 R 语言实现向前一步滚动预测的方法来预测收益率的波动率。对于每一个 GARCH 模型,本文把预测窗口取为 481 天,然后利用这个窗口滚动向前预测 135 次,每次都要重新估计模型的参量,最终产生 135 个向前一步预测数据波动率。这些参数由最大似然率方法估量。因为对评估窗口的最佳规模没有具体的理论性描述,因此估计的选择通常是主观的。一般来说,选择大型的评估窗口是满足统计需要的,会提高参数估计的效率。一个实用的考虑为,利用一个足够大的评估窗口可以避免基于似然估计的控制弊端,特别是估量参数较多的 GARCH 模型时。

2 数据分析

本文选取上证综合指数 2013 年 03 月 05 日至 2015 年 09 月 11 日之间的日收益率数据作为研究对象,以 2013 年 03 月 05 日至 2015 年 02 月 27 日收益率数据作为样本内数据,把 2015 年 03 月 02 日至 2015 年 09 月 11 日之间的收益率数据作为样本外数据。

使用 MATLAB 软件对样本数据进行了相应的统计分析,绘制了上证综指日收益率走势图,如图 1 所示,序列围绕在零值附近波动,大部分时期波动范围在-0.06 至 0.06 之间,收益率序列存在一段时期波动持续偏小,一段时期波动持续偏大的显著集群效应,收益率序列表现出明显的异方差性。

本文接着对收益率序列的正态性进行了检验,并画出了相应的直方图和 Q-Q 图,如图 2 所示,序列存在明显的非对称性。

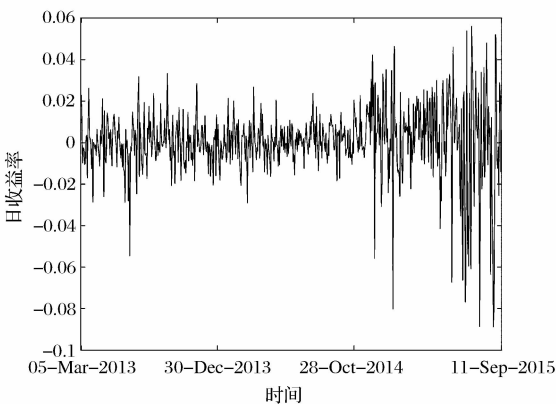


图 1 日收益率序列

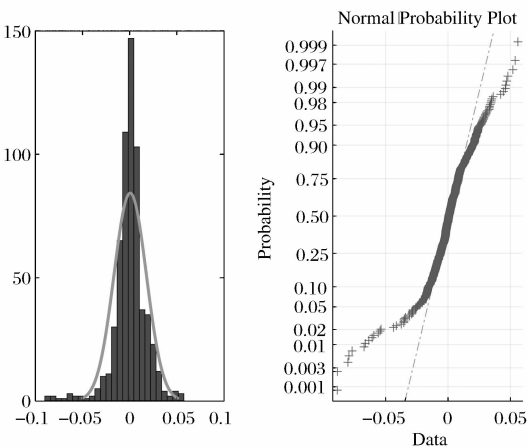


图 2 日收益率正态性检验图

进一步采用 Jarque-Bera 统计量对收益率序列进行正态性检验,得到 JB 统计量值为 978.1038,p 值为 0.001,分析执行结果可知:日收益率序列在默认显著性水平 5%下拒绝正态性假设。

表 1 Jarque-Bera 收益率的正态性检验

收益率	统计量	P 值	检验结论
r_t	978.103 8	0.001	非正态性

由上述分析可以得出:上证指数的日收益率分布不服从正态分布,呈现尖峰厚尾特性。

若日收益率数据残差序列具有长期自相关性,则样本数据特性完全符合 GARCH 模型的基本假设。对日收益率样本数据进行相关性检验,可以得到序列存在明显的一阶自相和和一阶偏自相关,其结果如图 3 所示。

接下来,对收益率序列进行了更加准确的平稳性检验,即进行 ADF 单位根检验,得到统计量为

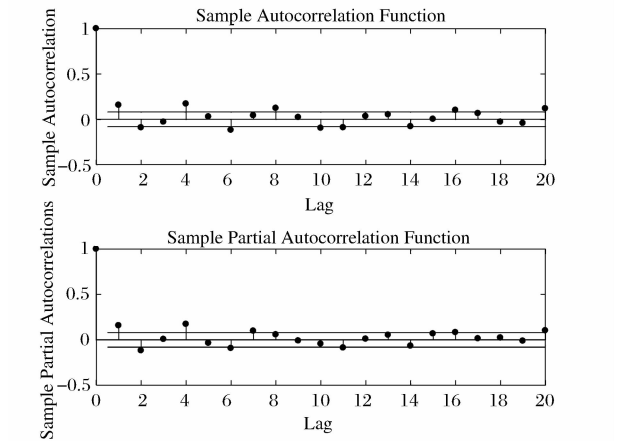


图 3 收益率自相关图与偏相关图

−21.178 5, p 值为 0.01, 所以拒绝原序列存在单位根假设, 可以认为原序列满足平稳性约束。

表 2 收益率的 ADF 单位根检验

收益率	统计量	P 值	检验结论
r_t	−21.178 5	0.01	平稳

最后, 对残差样本数据进行 Engle ARCH 检验, 执行结果在最大滞后阶数为 1, 默认显著性水平 5% 的条件下, 拒绝原假设, 即收益率残差存在 ARCH 效应, 无 ARCH 效应模型不适用。为了进一步把握收益率残差存在 ARCH 效应, 又对残差序列平方做了 Ljung-Box Q 检验, 得到 Q 统计量为 442.725, p 值为 0, 拒绝残差平方序列无自相关假设。

因此, 适合采用 GARCH 族模型来拟合上证综合指数收益率序列。

表 3 残差序列的 Ljung-Box Q 检验

收益率	统计量	P 值	检验结论
ϵ_t	442.725	0.00	拒绝残差无自相关性

3 结果分析

由于其他模型都是基于标准 GARCH 模型发展而来的, 这里本文只画出具代表性的残差服从偏 t 分布的 GARCH(1,1) 预测波动率与实际波动率的对比图, 如图 4 所示。基于偏 t 分布的 12 个模型的损失函数表如表 4、5、6、7, 损失函数值越小对应的模型预测能力越强, 因此可以分析得到: 在每一个滞后阶数水平 (p, q) 上进行横向比较, GARCH 模型预测能力强于 GJR-GARCH 模型, 而 GJR-GARCH 模型的预测能力又强于 EGARCH 模型。然后对同一个模型进行纵向比较可以得到, 低阶模型优于高阶模型,

其中又属 GARCH(1,1) 与 GARCH(1,2) 模型的预测能力优于其他所有模型。

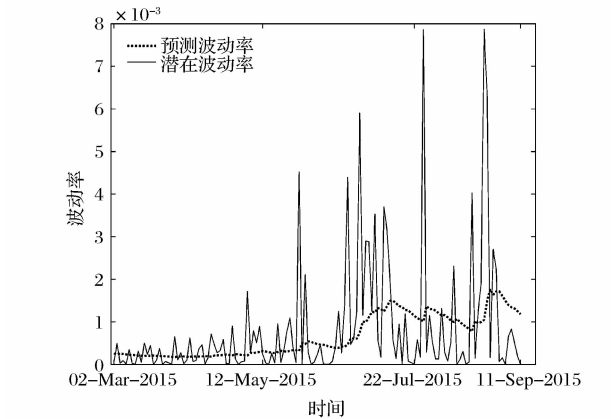


图 4 偏 t 分布 GARCH(1,1) 预测波动率与实际波动率

表 4 (1,1) 阶模型损失函数表

	GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)	GJR-GARCH (1,1)
MAE	0.000 788 645 7	0.000 803 951 4	0.000 780 040 3
RMSE	0.001 392 93	0.001 463 369	0.001 418 733
MAPE	0.999 430 8	0.999 512 3	0.999 473 1
HRSME	2.157 405	4.074 449	2.251 918
HMAE	1.284 209	1.833 782	1.328 935

表 5 (1,2) 阶模型损失函数表

	GARCH (1,2)	EGARCH (1,2)	GJR-GARCH (1,2)
MAE	0.000 788 793 3	0.000 789 758 3	0.000 780 407 5
RMSE	0.001 392 79	0.001 467 838	0.001 418 704
MAPE	0.999 430 3	0.999 538 4	0.999 472 4
HRSME	2.149 991	5.296 594	2.246 971
HMAE	1.281 391	2.227 156	1.324 373

表 6 (2,1) 阶模型损失函数表

	GARCH (2,1)	EGARCH (2,1)	GJR-GARCH (2,1)
MAE	0.000 801 888 1	0.000 827 341 2	0.000 789 857 1
RMSE	0.001 410 906	0.001 468 025	0.001 432 631
MAPE	0.999 421	0.999 508 5	0.999 473 4
HRSME	2.131 82	4.979 091	2.286 909
HMAE	1.285 652	2.008 279	1.341 754

表 7 (2,2)阶模型损失函数表

	GARCH (2,2)	EGARCH (2,2)	GJR-GARCH (2,2)
MAE	0.000 799 730 1	0.000 803 963 2	0.000 794 062 3
RMSE	0.001 408 983	0.001 493 388	0.001 446 869
MAPE	0.999 423 1	0.999 560 2	0.999 480 2
HRSME	2.161 822	9.382 849	2.461 047
HMAE	1.293 244	3.237 135	1.380 962

4 结论及建议

本文在三种不同 GARCH 模型的四个滞后阶数上对上证综合指数预测能力的比较结果为:GARCH 模型强于 GJR-GARCH 模型,而 GJR-GARCH 模型又强于 EGARCH 模型,其中又属 GARCH(1,1)模型的预测能力最强。因此可以得出结论:在证券市场高风险时期,即通常的牛市转熊市期间,GARCH(1,1)模型在预测上证指数的收益波动时表现相对更好。本文得出的结果与 Hansen 和 Lunde 的结论不冲突^[4],他们使用 1992 年 10 月 1 日到 1993 年 9 月 30 日美元汇率以及 1999 年 6 月 1 日到 2000 年 5 月 31 日的 IBM 股票收益率作为数据样本,评估了 300 多种预测波动性的模型,得出的结论是 GARCH(1,1)模型要优于其它模型。本文的结论与方立兵等提出的 EGARCH 模型预测股票波动性的能力更强的结论并不完全一致^[5]。造成这些不同的可能原因如下:①本文重视并考虑了收益率序列的厚尾特征,所以文中的全部 12 个 GARCH 模型的残差序列分布都采用的是厚尾分布,这是本文的不同之处。②样本数据的类型不同。本文研究的是股票指数数据,而他们研究的是个股数据。③预测时期的选择不同,本文选择的预测时期是中国证券市场牛市转熊市阶段,有着非常现实的意义与应用。因此通过本文的分析,上证指数剧烈波动时期,以及牛市熊市更迭时期,在对

上证股指预测模型的选择方面,本文建议采取“简洁优于复杂”的原则,在模型都符合实际金融时间序列结构的前提下,结构简洁滞后阶数少的 GARCH 模型往往会取得更好的预测效果,因此不建议一味地追求结构复杂的预测模型。

参考文献

[1] BOLLERSLEV T. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity[J]. Journal of Econometrics, 1986, 31 (3):307—327.

[2] NELSON D B. Conditional heteroscedasticity in asset returns: a new approach[J]. Modelling Stock Market Volatility,1991,59(2):37—64.

[3] GLOSTEN L R, JAGANNATHAN R, RUNKLE D E. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks[J]. Journal of Finance, 1993,48(5):1779—1801.

[4] HANSEN P R, LUNDE A. A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1,1)? [J]. Journal of Applied Econometrics, 2005,20(7):873—889.

[5] 方立兵, 郭炳仲, 曾勇. GARCH 族模型的波动率预测绩效比较[R]. 成都: 西南财经大学, 2009.

[6] HANSEN P R, HUANG Z, SHEK H H. Realized GARCH: a joint model for returns and realized measures of volatility [J]. Journal of Applied Econometrics, 2012, 27 (6): 877—906.

[7] 王天一, 黄卓. 高频数据波动率建模: 基于厚尾分布的 Realized GARCH 模型[J]. 数量经济技术经济研究, 2012(5): 149—160.

[8] HANSEN B. Autoregressive conditional density estimation [J]. International Economic Review, 1994, 35 (3): 705—730.

[9] 闫妍, 朱晓武, 熊爱民. 金融危机后世界主要股票指数的金融风险: 基于 t 分布的实证分析[J]. 系统工程理论与实践, 2011,31(5):841—847.

Application of Models Based on Fat-tail Distribution in Fluctuation
Tendency of Shanghai Composite Index

DENG Ya-dong, WANG Bo

(College of Management, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: During the high risk period, the yield rate series of stock of index has more obvious fat-tail phenomenon, Setting the residuals for fat-tail distribution of these GARCH models is superior to the models with normal distribution and t distribution. According to the five kinds of loss functions, GARCH model, EGARCH model and GJR-GARCH model are compared based on fat-tail distribution, the conclusion is that GARCH (1, 1) model with briefer structure has a better prediction ability in the high risk period.

Key words: fat-tail distribution; GARCH model; fluctuation prediction