竞争环境下多价格等级的平行航班动态定价模型研究

朱志愚，王宗宝，刘 燕，马景禄

（中国民用航空飞行学院 机场工程与运输管理学院，四川 广汉 618307）

摘要：在竞争环境下，以不同价格等级切换时间点作为决策变量，建立考虑乘客选择行为的两家竞争航空公司三级价格等级的动态定价模型，给出了均衡解满足的条件，探讨了模型求解的方法，并通过数值算例来验证模型的性质，并与两家航空公司的两级价格动态定价模型进行对比，验证多级价格等级动态定价的优越性。

关键词：收益管理；动态定价；MNL

中图分类号：F560.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671－1807(2016)09－0106－07

截止到 2015 年 2 月，中国运输航空公司达到 52 家，再加上中国的空域限制，从而导致航空公司间的竞争日益激烈。特别是在客流量较大的航线上，航班的班次更多，如成都至北京航线，仅直达就有川航、国航、南航、海航、中联航、藏航、深航、东航八家航空公司同时运营。在这种环境下，航空公司要想获得更大收益，需要采取合理的定价策略。策略的选择要考虑自身剩余座位水平、需求状况，以及竞争航班的策略[1]。

在一些重要航线，同一时刻最多有 3 家航空公司同时运营，每个航空公司都提供两种以上的价格折扣，因此多价格等级、多航班模型的研究有重大的实践意义。但由于多航班、多价格等级模型构建的复杂性以及乘客选择行为如何描述问题[2]，目前大多数的研究是单航班多价格或者两航班两个价格等级的研究。因此拟从我国航空客运市场的实际情况出发，在现有研究基础之上，特别是在彭际华[3]构造的动态定价模型基础上，将离散价格等级扩展成三价格等级。

1 相关文献综述

1）在现有的动态定价研究中，根据价格设定的不同，可以分为两类：

①对于连续价格型的研究，其大多数是研究在一定的库存水平下，确定最优的价格来保证期望收益的最大。对于单航班来说，如商红岩[4]建立了垄断情况下单航班的多等级动态差别定价模型；而对于竞争环境下的多航班来说，如陈锐锐[5]、李豪[6]、曹海娜[2]等人的研究。

②对于离散价格型的研究，主要研究的是在给定的价格集合以及一定的库存水平下，确定各价格等级的切换点的位置来保证期望收益的最大。其中对于多价格等级的研究多集中于一个航班的情况。如 Feng 和 Xiao[7]建立了连续时间的、多级票价结构的单航班动态定价模型，并得出通过这种价格变换策略可以增大航空公司的收益。李晓花[8]在 Feng 和 Xiao[7]的单航班动态定价模型的基础上，进行了扩展，建立了单航班动态定价与舱位控制的统一策略模型。李小萌[9]仅对彭际华[3]构造的垄断环境下单一航班的两价格定价模型进行了三价格等级的扩展，并没有对竞争环境下的两个航班进行扩展。对于竞争环境下多航班动态定价模型的研究相对较少，且大多集中于两价格等级，如罗利[1]、彭际华[3]、郭晖[10]等人的研究，并都假设消费者是短视的或完全理性的。

2）关于平行航班（即可替代性的航班）的动态定价研究，分为两类：

①针对一个航空公司，在相同出发地及目的地之间设定的多个航班，除起飞时间、机型容量两个因素有差别外，其他条件相同[2]。大部分的研究都是研究同一公司的两个平行航班，如罗利[11]、Xiao[12]、曹海娜[2]等。

②针对多家不同的航空公司，但大部分的研究都针对在相同出发地及目的地之间设定起飞时刻相同的两家航空公司的两个航班，如罗利[11]、彭际华[3]、

收稿日期：2016－04－16

基金项目：中国民用航空飞行学院研究生创新项目(X2015－41)。

作者简介：朱志愚(1962—)，男，四川资阳人，中国民用航空飞行学院，教授，研究方向：航空运输管理；王宗宝(1990—)，男，山东费县人，中国民用航空飞行学院，硕士研究生，研究方向：航空运输管理。

陈锐锐[5]、李豪[6]等。

2 MNL 基本理论

MNL(Multinomial Logit Model)模型是基于随机效用最大化的理论模型。定义消费者 n 对产品 j 的效用为 $U_{nj}=V_{nj}+\varepsilon_{nj}$，其中 ε_{nj} 为一个随机变量，用来描述乘客 n 对产品 j 的特殊偏好，服从 Gumbel 分布；V_{nj} 表示乘客 n 选择产品 j 的平均效用。

将 MNL 模型应用于平行航班的研究中，能够有效的避免研究对象逻辑对等的限制。对于想选择乘坐飞机出行的乘客来说，航空公司的竞争力表现在所用机型、品牌影响力、航班频率、票价等级以及航班时刻等方面，但对于两家航空公司的两个起飞时刻相同、机型相同的平行航班来说，两家航空公司的竞争力主要体现在票价等级的高低和品牌的影响力。

因此为了描述两个竞争的平行航班的效用，在郭晖[10]的效用函数的基础上进行简化，设定航班频率都为 1，则效用函数为 $V_{ki}=\alpha\ln(N_k)-\beta p_i^k+\gamma\ln(B_k)$，其中 V_{ki} 表示乘客对航空公司 k 在价格为 p_i^k 时的平均效用；N_k 表示航空公司k 所使用的机型，用航空公司 k 所投放的座位总数进行量化，由于研究对象是起飞时刻、机型均相同的平行航班，因此各航空公司 N_k 的值是相同的；p_i^k 表示航空公司k 当前价格等级为 i 等级；B_k 表示航空公司k 的品牌影响力，用常旅客数量进行量化。对于航空公司 1、2 的价格组合为(p_i^1,p_j^2)时，根据 MNL 模型，将乘客放弃购买的行为定义为购买产品 0，其概率为 $q_0=1/(1+e^{V_{1i}}+e^{V_{2j}})$；乘客购买航空公司 1、2 的航班机票概率分别为 $q_1=e^{V_{1i}}/(1+e^{V_{1i}}+e^{V_{2j}})$、$q_2=e^{V_{2j}}/(1+e^{V_{1i}}+e^{V_{2j}})$。

3 问题描述及模型建立

对于同一条航线上两家航空公司的两个竞争的平行航班，设双方的销售时段为$[0,T]$，两个平行航班所选机型相同，即投放的座位总数相同，用 N_1、N_2 表示。设每个航班提供高、中、低三种价格，用 p_1^k、p_2^k、p_3^k 表示。价格水平为(p_i^1,p_j^2)时，航班 k 的需求密度为 λ_{ij}^k。$z_{n_1,n_2}^{k,1}$、$z_{n_1,n_2}^{k,2}$ 分别表示第 k 个航空公司的 p_1^k 与 p_2^k、p_2^k 与 p_3^k 的价格等级切换时间点。假设如下：

1)不考虑超售、退票，No-Show；双方竞争是完全信息的；

2)顾客在销售期的到达服从泊松过程；

3)竞争环境下，收入是价格的递减函数，即：

$\lambda_{1j}^1(t)p_1^1<\lambda_{2j}^1(t)p_2^1<\lambda_{3j}^1(t)p_3^1,(j=1,2,3)$；$\lambda_{i1}^2(t)p_1^2<\lambda_{i2}^2(t)p_2^2<\lambda_{i3}^2(t)p_3^2,(i=1,2,3)$

4)当剩余座位数(n_1,n_2)固定时，各航空公司的最优价格 $p^{*k}(s,n_1,n_2)$ 随时间 s 的增加而递减[1]，即 $\forall s\in[0,T],s'\in[0,T]$，当 $s\leqslant s'$，有 $p^k(s,n_1,n_2)\geqslant p^k(s',n_1,n_2)$。

销售过程描述：在 $\forall s\in[t,T]$，剩余座位水平为(n_1，n_2)时，各航班面临的决策为确定高、中、低价格等级的切换时间点($z_{n_1,n_2}^{1,1}$，$z_{n_1,n_2}^{1,2}$)、($z_{n_1,n_2}^{2,1}$，$z_{n_1,n_2}^{2,2}$)，确保所采取的最优价格 $p^{*k}(s,n_1,n_2)$ 使其获得最大的期望收益。当剩余座位水平不变时，各航空公司的策略保持不变，但当 s 时刻，下一个顾客到达(设一个时间段内至多仅有一个顾客到达)，购买了其中一家航空公司的机票，导致剩余座位水平发生变化。此时会出现两种情况：

1)若 s 时刻，航空公司 1 卖出一张票，则进入销售时间$[s,T]$，库存水平为(n_1-1,n_2)，关于策略($z_{n_1-1,n_2}^{1,1},z_{n_1-1,n_2}^{1,2}$)、($z_{n_1-1,n_2}^{2,1},z_{n_1-1,n_2}^{2,2}$)的竞争。

2)若 s 时刻，航空公司 2 卖出一张票，则进入销售时间$[s,T]$，库存水平为(n_1,n_2-1)，关于策略($z_{n_1,n_2-1}^{1,1},z_{n_1,n_2-1}^{1,2}$)、($z_{n_1,n_2-1}^{2,1},z_{n_1,n_2-1}^{2,2}$)的竞争。

竞争一直延续到销售时间截止或其中一家的机票售完时结束。

由于顾客到达过程服从泊松分布，则相邻两个顾客到达的时间间隔服从指数分布[1]。设$[t,z]$内顾客到达率为 λ_1，$[z,T]$内顾客到达率为 λ_2，则从 t 开始，下一位顾客到达的时刻服从的密度函数为：

$$f(s)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1(s-t)},s\in[t,z]\\ \lambda_2 e^{-\lambda_2(s-t)}e^{-\lambda_1(z-t)},s\in(z,T]\end{cases}$$

又由于问题的对称性，设 $t\leqslant z_{n_1,n_2}^{1,1}\leqslant z_{n_1,n_2}^{2,1}\leqslant z_{n_1,n_2}^{1,2}\leqslant z_{n_1,n_2}^{2,2}\leqslant T$。

因此，事件"s 时刻航空公司k 卖出一张机票，双方因剩余座位水平的改变而转入下一次竞争"的概率密度函数为：

$$f_k(s)=$$

$$\begin{cases}\lambda_{11}^k e^{-(\lambda_{11}^1+\lambda_{11}^2)(s-t)},s\in[t,z_{n_1,n_2}^{1,1}]\\ \lambda_{21}^k e^{-(\lambda_{21}^1+\lambda_{21}^2)(s-z_{n_1,n_2}^{1,1})}f'_k(z_{n_1,n_2}^{1,1}),s\in[z_{n_1,n_2}^{1,1},z_{n_1,n_2}^{2,1}]\\ \lambda_{22}^k e^{-(\lambda_{22}^1+\lambda_{22}^2)(s-z_{n_1,n_2}^{2,1})}f'_k(z_{n_1,n_2}^{2,1}),s\in[z_{n_1,n_2}^{2,1},z_{n_1,n_2}^{1,2}]\\ \lambda_{32}^k e^{-(\lambda_{32}^1+\lambda_{32}^2)(s-z_{n_1,n_2}^{1,2})}f'_k(z_{n_1,n_2}^{1,2}),s\in[z_{n_1,n_2}^{1,2},z_{n_1,n_2}^{2,2}]\\ \lambda_{33}^k e^{-(\lambda_{33}^1+\lambda_{33}^2)(s-z_{n_1,n_2}^{2,2})}f'_k(z_{n_1,n_2}^{2,2}),s\in[z_{n_1,n_2}^{2,2},T]\end{cases}$$

其中：$f'_k(z_{n_1,n_2}^{1,1})=e^{-(\lambda_{11}^1+\lambda_{11}^2)(z_{n_1,n_2}^{1,1}-t)}$；

$f'_k(z_{n_1,n_2}^{2,1})=f'_k(z_{n_1,n_2}^{1,1})e^{-(\lambda_{21}^1+\lambda_{21}^2)(z_{n_1,n_2}^{2,1}-z_{n_1,n_2}^{1,1})}$；

$f'_k(z_{n_1,n_2}^{1,2})=f'_k(z_{n_1,n_2}^{2,1})e^{-(\lambda_{22}^1+\lambda_{22}^2)(z_{n_1,n_2}^{1,2}-z_{n_1,n_2}^{2,1})}$；

$f'_k(z^{2,2}_{n_1,n_2}) = f'_k(z^{1,2}_{n_1,n_2}) e^{-(\lambda^1_{32}+\lambda^2_{32})(z^{2,2}_{n_1,n_2}-z^{1,2}_{n_1,n_2})}$；

在 s 时刻，库存水平（n_1,n_2）时，航空公司 1 以 $p_i^1(s)$ 卖出一张机票时，则航空公司 1、2 分别获得的期望收益为 $p_i^1(s)+V_1^*(s,n_1-1,n_2)$、$V_2^*(s,n_1-1,n_2)$；

同理可得，若 s 时刻，库存水平（n_1,n_2）时，航空公司 2 以 $p_j^2(s)$ 卖出一张机票时，则航空公司 1、2 分别获得的期望收益为 $V_1^*(s,n_1,n_2-1)$、$p_j^2(s)+V_2^*(s,n_1,n_2-1)$。故在 t 时刻，剩余座位数为（$n_1$，$n_2$），策略（$z^{1,1}_{n_1,n_2}$，$z^{1,2}_{n_1,n_2}$）、（$z^{2,1}_{n_1,n_2}$，$z^{2,2}_{n_1,n_2}$）下各自的期望收益函数为：

$$
\begin{aligned}
&V_1(t,n_1,n_2,z^{1,1}_{n_1,n_2},z^{2,1}_{n_1,n_2},z^{1,2}_{n_1,n_2},z^{2,2}_{n_1,n_2}) = \\
&\int_t^{z^{1,1}_{n_1,n_2}} \{[V_1^*(s,n_1-1,n_2)+p_1^1]\lambda^1_{11}+V_1^*(s,n_1,n_2-1)\lambda^2_{11}\} e^{-(\lambda^1_{11}+\lambda^2_{11})(s-t)} ds + \int_{z^{1,1}_{n_1,n_2}}^{z^{2,1}_{n_1,n_2}} \{[V_1^*(s,n_1-1,n_2)+ \\
&p_2^1]\lambda^1_{21}+V_1^*(s,n_1,n_2-1)\lambda^2_{21}\} e^{-(\lambda^1_{21}+\lambda^2_{21})(s-z^{1,1}_{n_1,n_2})} \\
&f'_k(z^{1,1}_{n_1,n_2}) ds + \int_{z^{2,1}_{n_1,n_2}}^{z^{1,2}_{n_1,n_2}} \{[V_1^*(s,n_1-1,n_2)+p_2^1]\lambda^1_{22}+ \\
&V_1^*(s,n_1,n_2-1)\lambda^2_{22}\} e^{-(\lambda^1_{22}+\lambda^2_{22})(s-z^{2,1}_{n_1,n_2})} f'_k(z^{2,1}_{n_1,n_2}) ds + \\
&\int_{z^{1,2}_{n_1,n_2}}^{z^{2,2}_{n_1,n_2}} \{[V_1^*(s,n_1-1,n_2)+p_3^1]\lambda^1_{32}+V_1^*(s,n_1,n_2-1)\lambda^2_{32}\} e^{-(\lambda^1_{32}+\lambda^2_{32})(s-z^{1,2}_{n_1,n_2})} f'_k(z^{1,2}_{n_1,n_2}) ds + \int_{z^{2,2}_{n_1,n_2}}^{T} \{[V_1^*(s, \\
&n_1-1,n_2)+p_3^1]\lambda^1_{33}+V_1^*(s,n_1,n_2-1)\lambda^2_{33}\} \\
&e^{-(\lambda^1_{33}+\lambda^2_{33})(s-z^{2,2}_{n_1,n_2})} f'_k(z^{2,2}_{n_1,n_2}) ds
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
&V_2(t,n_1,n_2,z^{1,1}_{n_1,n_2},z^{2,1}_{n_1,n_2},z^{1,2}_{n_1,n_2},z^{2,2}_{n_1,n_2}) = \\
&\int_t^{z^{1,1}_{n_1,n_2}} \{[V_2^*(s,n_1,n_2-1)+p_1^2]\lambda^2_{11}+V_2^*(s,n_1-1, \\
&n_2)\lambda^1_{11}\} e^{-(\lambda^1_{11}+\lambda^2_{11})(s-t)} ds + \int_{z^{1,1}_{n_1,n_2}}^{z^{2,1}_{n_1,n_2}} \{[V_2^*(s,n_1,n_2-1)+ \\
&p_1^2]\lambda^2_{21}+V_2^*(s,n_1-1,n_2)\lambda^1_{21}\} e^{-(\lambda^1_{21}+\lambda^2_{21})(s-z^{1,1}_{n_1,n_2})} \\
&f'_k(z^{1,1}_{n_1,n_2}) ds + \int_{z^{2,1}_{n_1,n_2}}^{z^{1,2}_{n_1,n_2}} \{[V_2^*(s,n_1,n_2-1)+p_2^2]\lambda^2_{22}+ \\
&V_2^*(s,n_1-1,n_2)\lambda^1_{22}\} e^{-(\lambda^1_{22}+\lambda^2_{22})(s-z^{2,1}_{n_1,n_2})} f'_k(z^{2,1}_{n_1,n_2}) ds + \\
&\int_{z^{1,2}_{n_1,n_2}}^{z^{2,2}_{n_1,n_2}} \{[V_2^*(s,n_1,n_2-1)+p_2^2]\lambda^2_{32}+V_2^*(s,n_1-1, \\
&n_2)\lambda^1_{32}\} e^{-(\lambda^1_{32}+\lambda^2_{32})(s-z^{1,2}_{n_1,n_2})} f'_k(z^{1,2}_{n_1,n_2}) ds + \int_{z^{2,2}_{n_1,n_2}}^{T} \{[V_2^*(s, \\
&n_1,n_2-1)+p_3^2]\lambda^2_{33}+V_2^*(s,n_1-1, \\
&n_2)\lambda^1_{33}\} e^{-(\lambda^1_{33}+\lambda^2_{33})(s-z^{2,2}_{n_1,n_2})} f'_k(z^{2,2}_{n_1,n_2}) ds
\end{aligned}
\tag{2}
$$

其中 $V_1^*(s,n_1-1,n_2)$、$V_2^*(s,n_1-1,n_2)$ 表示在 s 时刻，剩余座位为（n_1-1,n_2）时，均衡策略下的期望收益；$V_1^*(s,n_1,n_2-1)$、$V_2^*(s,n_1,n_2-1)$ 表示在 s 时刻剩余座位为（n_1,n_2-1）时，均衡策略下的期望收益。

3.1　均衡策略的推导

由(1)和(2)式可得，航空公司 1 的航班期望收益 V_1 同时受自身的策略（$z^{1,1}_{n_1,n_2}$，$z^{1,2}_{n_1,n_2}$）和对手策略（$z^{2,1}_{n_1,n_2}$，$z^{2,2}_{n_1,n_2}$）影响。航空公司 k 想要获得更大的收益，必须兼顾对手策略的同时，调整自身策略（$z^{k,1}_{n_1,n_2}$，$z^{k,2}_{n_1,n_2}$）。对航空公司 1 来说，当对手策略（$z^{2,1}_{n_1,n_2}$，$z^{2,2}_{n_1,n_2}$）固定时，V_1 对自身价格切换点 $z^{1,1}_{n_1,n_2}$，$z^{1,2}_{n_1,n_2}$ 分别求导，整理得：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial V_1}{\partial z^{1,1}_{n_1,n_2}} = \{\lambda^1_{11}p^1_1-\lambda^1_{21}p^1_2+(\lambda^1_{11}- \\
&\lambda^1_{21})[V_1(z^{1,1}_{n_1,n_2},n_1-1,n_2)-V_1^*(z^{1,1}_{n_1,n_2},n_1,n_2)]+ \\
&(\lambda^2_{11}-\lambda^2_{21})[V_1(z^{1,1}_{n_1,n_2},n_1,n_2)-V_1^*(z^{1,1}_{n_1,n_2},n_1,n_2- \\
&1)]\} f'_k(z^{1,1}_{n_1,n_2})\ \frac{\partial V_1}{\partial z^{1,2}_{n_1,n_2}} = \{\lambda^1_{22}p^1_2-\lambda^1_{32}p^1_3+(\lambda^2_{32}- \\
&\lambda^2_{22})[V_1(z^{1,2}_{n_1,n_2},n_1,n_2)-V_1^*(z^{1,2}_{n_1,n_2},n_1,n_2-1)]+ \\
&(\lambda^1_{32}-\lambda^1_{22})[V_1(z^{1,2}_{n_1,n_2},n_1,n_2)-V_1^*(z^{1,2}_{n_1,n_2},n_1-1, \\
&n_2)]\} f'_k(z^{1,2}_{n_1,n_2})
\end{aligned}
\tag{3}
$$

同理，对航空公司 2 来说，当对手策略（$z^{1,1}_{n_1,n_2}$，$z^{1,2}_{n_1,n_2}$）固定时，V_2 对自身价格切换点 $z^{2,1}_{n_1,n_2}$，$z^{2,2}_{n_1,n_2}$ 分别求导，整理得：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial V_2}{\partial z^{2,1}_{n_1,n_2}} = \{\lambda^1_{21}p^2_1-\lambda^2_{22}p^2_2+(\lambda^2_{22}- \\
&\lambda^2_{21})[V_2(z^{2,1}_{n_1,n_2},n_1,n_2)-V_2^*(z^{2,1}_{n_1,n_2},n_1,n_2-1)]+ \\
&(\lambda^1_{22}-\lambda^1_{21})[V_2(z^{2,1}_{n_1,n_2},n_1,n_2)-V_2^*(z^{2,1}_{n_1,n_2},n_1-1, \\
&n_2)]\} f'_k(z^{2,1}_{n_1,n_2})\ \frac{\partial V_2}{\partial z^{2,2}_{n_1,n_2}} = \{\lambda^2_{32}p^2_2-\lambda^2_{33}p^2_3+(\lambda^2_{33}- \\
&\lambda^2_{32})[V_2(z^{2,2}_{n_1,n_2},n_1,n_2)-V_2^*(z^{2,2}_{n_1,n_2},n_1,n_2-1)]+ \\
&(\lambda^1_{33}-\lambda^1_{32})[V_2(z^{2,2}_{n_1,n_2},n_1,n_2)-V_2^*(z^{2,2}_{n_1,n_2},n_1-1, \\
&n_2)]\} f'_k(z^{2,2}_{n_1,n_2})
\end{aligned}
\tag{4}
$$

要取得极值，令其偏导数为 0，联立可得：

$$
\frac{\partial V_1}{\partial z^{1,1}_{n_1,n_2}} = 0;\frac{\partial V_1}{\partial z^{1,2}_{n_1,n_2}} = 0;\frac{\partial V_2}{\partial z^{2,1}_{n_1,n_2}} = 0;\frac{\partial V_2}{\partial z^{2,2}_{n_1,n_2}} = 0;
\tag{5}
$$

双方价格等级切换点的均衡策略位置满足(5)式或是在其闭区间的端点。

3.2　模型性质

性质 1：价格等级切换点的位置不受决策时间 t 影响。

证明：由(3)、(4)式可以得出决策时间变量 t 仅仅存在于 $f'_k(z^{1,1}_{n_1,n_2})$，$f'_k(z^{1,2}_{n_1,n_2})$，$f'_k(z^{2,1}_{n_1,n_2})$，$f'_k(z^{2,2}_{n_1,n_2})$ 的指数位置上，决策时间变量的变化不会改变偏导数的

符号。

性质 2：在各航空公司的价格等级切换点策略（$z^{1,1}_{n_1,n_2}$，$z^{2,1}_{n_1,n_2}$，$z^{1,2}_{n_1,n_2}$，$z^{2,2}_{n_1,n_2}$）固定时，销售时间 t 增大时，各航空公司的航班的期望收益将降低。当 $t = T$ 时，各航空公司的期望收益为零。

证明：设 t 时刻各航空公司航班的最优价格分别为 $p^1_i(i=1,2,3)$、$p^2_j(j=1,2,3)$，对一个任意小数的正数 Δt，即在 $t-\Delta t$ 时刻的最优价格依然是 p^1_i、p^2_j，航空公司 1 的航班在 $t-\Delta t$ 时刻的期望收益可表示为：

$$V_1(t-\Delta t,n_1,n_2,z^{1,1}_{n_1,n_2},z^{2,1}_{n_1,n_2},z^{1,2}_{n_1,n_2},z^{2,2}_{n_1,n_2}) = \int_{t-\Delta t}^{t}\{[V^*_1(s,n_1-1,n_2)+p^1_i]\lambda^1_{ij}+V^*_1(s,n_1,n_2-1)]\lambda^2_{ij}\}e^{-(\lambda^1_{ij}+\lambda^2_{ij})(s-t-\Delta t)}ds + V_1(t,n_1,n_2,z^{1,1}_{n_1,n_2},z^{2,1}_{n_1,n_2},z^{1,2}_{n_1,n_2},z^{2,2}_{n_1,n_2})e^{-(\lambda^1_{ij}+\lambda^2_{ij})\Delta t} \quad (6)$$

其中上式积分项表示在 $[t-\Delta t,t]$ 内有一位顾客到达，公司 1 的航班卖出一张票转入下一次竞争时公司 1 的期望收益；第二项表示在 $[t-\Delta t,t]$ 没有顾客到达时的期望收益（与 t 时刻的期望收益相同）。当 $\Delta t \to 0$ 时，上式可近似计算如下：

$$V_1(t-\Delta t,n_1,n_2,z^{1,1}_{n_1,n_2},z^{2,1}_{n_1,n_2},z^{1,2}_{n_1,n_2},z^{2,2}_{n_1,n_2}) \overset{\Delta t\to 0}{=} \{[V^*_1(s,n_1-1,n_2)+p^1_i]\lambda^1_{ij}+V^*_1(s,n_1,n_2-1)]\lambda^2_{ij}\}e^{-(\lambda^1_{ij}+\lambda^2_{ij})\Delta t}\Delta t + V_1(t,n_1,n_2,z^{1,1}_{n_1,n_2},z^{2,1}_{n_1,n_2},z^{1,2}_{n_1,n_2},z^{2,2}_{n_1,n_2})e^{-(\lambda^1_{ij}+\lambda^2_{ij})\Delta t} \geqslant V_1(t,n_1,n_2,z^{1,1}_{n_1,n_2},z^{2,1}_{n_1,n_2},z^{1,2}_{n_1,n_2},z^{2,2}_{n_1,n_2})$$

同理可证：$V_2(t-\Delta t,n_1,n_2,z^{1,1}_{n_1,n_2},z^{2,1}_{n_1,n_2},z^{1,2}_{n_1,n_2},z^{2,2}_{n_1,n_2}) \geqslant V_2(t,n_1,n_2,z^{1,1}_{n_1,n_2},z^{2,1}_{n_1,n_2},z^{1,2}_{n_1,n_2},z^{2,2}_{n_1,n_2})$。

3.3 边界条件

1）在 $\forall t\in[0,T]$ 时，当 $n_1=0,n_2\neq 0$ 时，航空公司 1 的期望收益为 0，航空公司 2 进入垄断经营；当 $n_2=0,n_1\neq 0$ 时，航空公司 2 的期望收益为 0，航空公司 1 进入垄断经营。

2）航空运输产品具有易逝性，即销售截止时，未卖出座位的收益为零。

3.4 策略求解

竞争双方的期望收益函数是运用递归思想构建的，模型从库存水平（1,1）开始递归求解。

1）当 $n_1=1,n_2=0$ 时与 $n_1=0,n_2=1$ 时，即单航班垄断下的情况，按照单航班垄断下的求解方法对其进行求解。

2）当 $n_1=1,n_2=1$ 时，根据步骤 1 的结果结合（1）、（2）、（5）式进行迭代求解。

3）当 $n_1>1,n_2>1$ 时，在库存水平（n_1,n_2），策略（$z^{1,1}_{n_1,n_2}$，$z^{2,1}_{n_1,n_2}$，$z^{1,2}_{n_1,n_2}$，$z^{2,2}_{n_1,n_2}$）给定时，各航班的收益函数 $V_1(t,n_1,n_2,z^{1,1}_{n_1,n_2},z^{2,1}_{n_1,n_2},z^{1,2}_{n_1,n_2},z^{2,2}_{n_1,n_2})$、$V_2(t,n_1,n_2,z^{1,1}_{n_1,n_2},z^{2,1}_{n_1,n_2},z^{1,2}_{n_1,n_2},z^{2,2}_{n_1,n_2})$ 可根据（1）、（2）式求得。

4）如此递推下去，最终求得 $n_1=N_1,n_2=N_2$ 时的均衡策略和期望收益。

4 数值算例

设某航线上的两个竞争的平行航班，N_1、N_2 取值 20；将销售时间做归一化处理，双方都从 $t=0$ 时开始销售机票，到起飞时刻 $t=1$ 时停止售票；离散价格等级 1、2、3 分别为 1 200、1 000、800 元；市场总需求 λ 为 30，即平均每天有 30 个人购买该航线的机票；效用函数的参数采用郭晖[12]的参数设置，即 α、β、γ 为 0.202 8、0.004 3、0.274 4，航空公司 1、2 的品牌影响力 B_1、B_2 分别为 6 315.9、2 202.75。

4.1 顾客选择行为的界定

依据第三节中消费者的选择概率公式求得消费者在各航空公司的选择概率。则在不同价格组合下各航班的需求密度求解如下：

1）在价格组合（p^1_i,p^2_j）时，航班 k 的需求密度为 $\lambda^k_{ij}=\lambda q_k$；

2）航班 1 垄断销售时的需求密度为 $\lambda^1_{i.}=\lambda^1_{i1}+\lambda^1_{i2}+\lambda^1_{i3}$；

3）航班 2 垄断销售时的需求密度为 $\lambda^2_{.j}=\lambda^2_{1j}+\lambda^2_{2j}+\lambda^2_{3j}$。

由上述计算方法，求得在各种价格组合下的需求密度，如表 1 所示。

表 1 需求密度表

航空公司 1	λ^1_1	λ^1_2	λ^1_3	λ^1_{11}	λ^1_{12}	λ^1_{13}	λ^1_{21}	λ^1_{22}	λ^1_{23}	λ^1_{31}	λ^1_{32}	λ^1_{33}
	7.72	16.31	30.85	2.90	2.64	2.18	6.06	5.57	4.68	11.22	10.50	9.12
航空公司 2	λ^2_1	λ^2_2	λ^2_3	λ^2_{11}	λ^2_{12}	λ^2_{13}	λ^2_{21}	λ^2_{22}	λ^2_{23}	λ^2_{31}	λ^2_{32}	λ^2_{33}
	5.60	12.17	24.23	2.17	4.67	9.11	2.17	4.67	9.11	1.92	4.17	8.29

注：数据四舍五入保留两位小数。

4.2 数值结果及分析

经检验上述需求密度满足假设 3，因此利用 3.4 节中所述的模型求解方法，编写 Matlab 程序可得如下结果。

4.2.1　价格等级

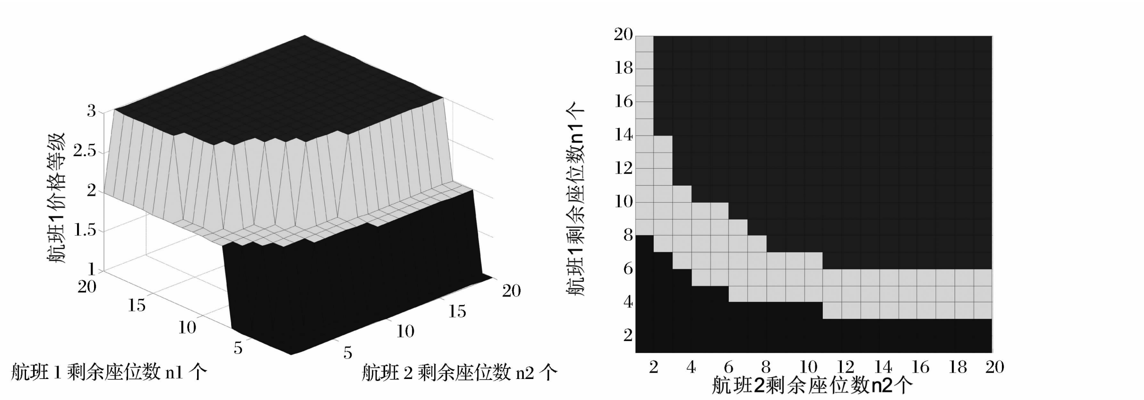

图 1　航班 1 的价格等级随库存变化关系图

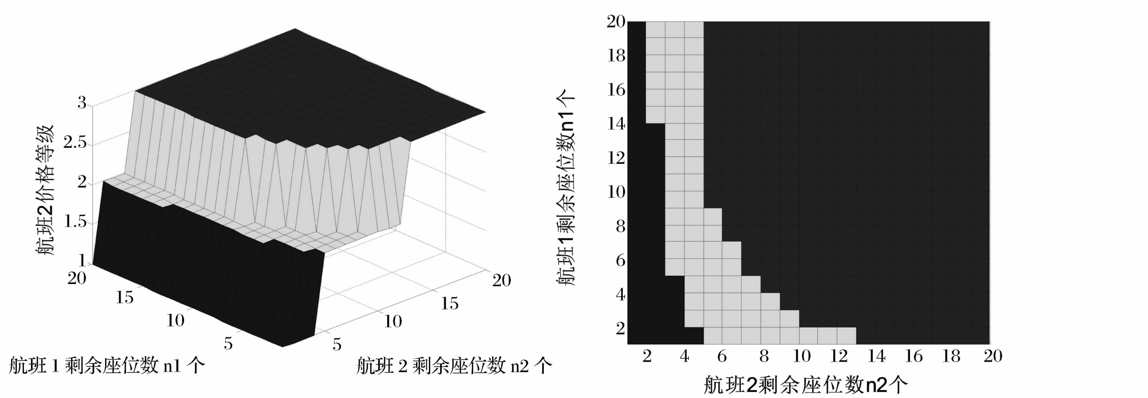

图 2　航班 2 的价格等级随库存变化关系图

由图 1、图 2 可得：

1）两个航班的价格等级随着剩余座位数的增加而降低，即剩余座位数越多，航空公司的价格等级越低。

2）两个航班的价格等级切换点受自身剩余座位水平的影响大于竞争对手的剩余座位水平的影响。

4.2.2　价格切换点

由图 3、图 4、图 5、图 6 可得，价格等级切换点 $z^{1,1}_{n_1,n_2}$、$z^{1,2}_{n_1,n_2}$ 在 n_2 固定不变时，随自身剩余座位水平 n_1 的增加而递减，即自身剩余座位数越多时，航班越提前降低机票价格等级。但当 n_2 变化时，$z^{1,1}_{n_1,n_2}$、$z^{1,2}_{n_1,n_2}$ 的值也会受到影响，但受影响的程度小于自身库存的影响。$z^{2,1}_{n_1,n_2}$、$z^{2,2}_{n_1,n_2}$ 也有这样的特点。

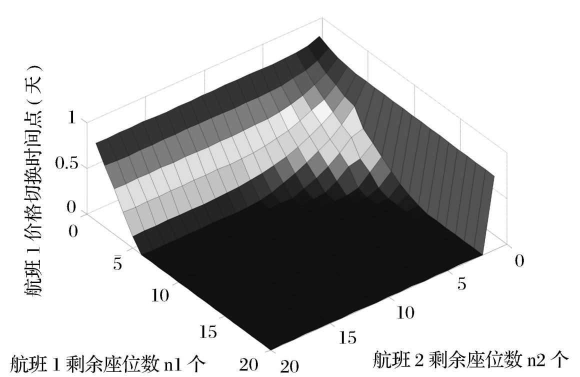

图 3　航空公司 1 的票价等级 2 与 3 的切换时间随剩余座位数的关系图

4.2.3　期望收益

由图 7 可得：

1）在航空公司 2 的剩余座位水平 n_2 不变的情况下，航空公司 1 的航班的期望收益 V_1 随销售时间 t 的增加而递减，随剩余座位水平 n_1 的增加而增大。

2）在航空公司 1 的剩余座位水平 n_1 不变的情况下，图中虚线（ $n_2=4$ 时的 V_1）总是在相邻实线（$n_2=6$ 时的 V_1 ）的上方。即当竞争一方（航空公司 2 的航班）的剩余座位水平降低时，另一方（航空公司 1 的航班）的期望收益增加。同理可得，图 8 也可以得出同样的性质。

4.2.4　边际期望收益

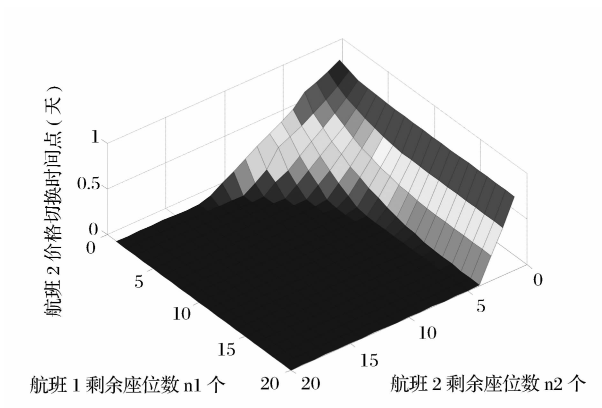

图4　航空公司2的票价等级2与3的切换时间随剩余座位数的关系图

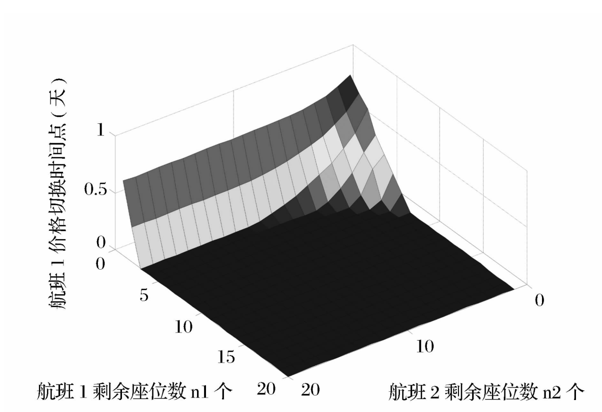

图5　航空公司1的票价等级1与2的切换时间随剩余座位数的关系图

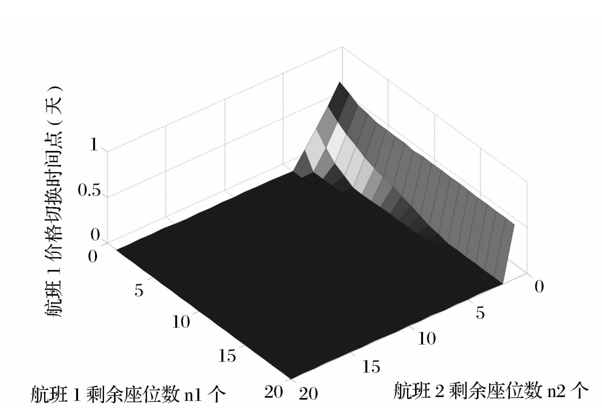

图6　航空公司2的票价等级1与2的切换时间随剩余座位数的关系图

由于研究问题的对称性，因此仅分析航空公司1的边际期望收益。由图9可得，航空公司1的航班座位的边际收益 $\Delta V_1 \geqslant 0$；航空公司1的航班的边际期望收益 ΔV_1 随销售时间 t 的增大而递减，随自身的剩余座位水平 n_1 的增大而递减。

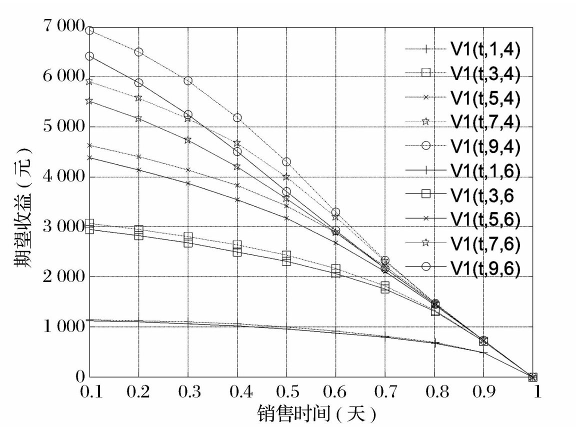

图7　航空公司1的期望收益

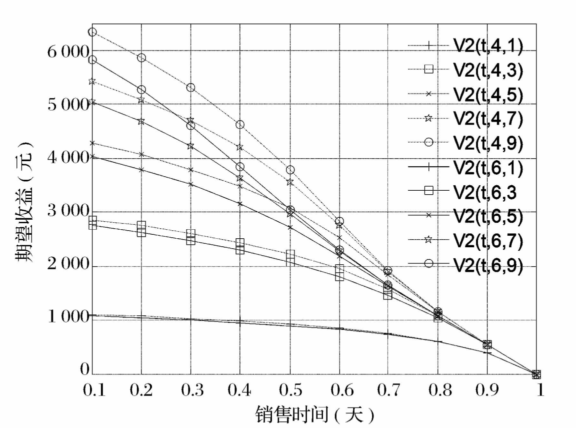

图8　航空公司2的期望收益

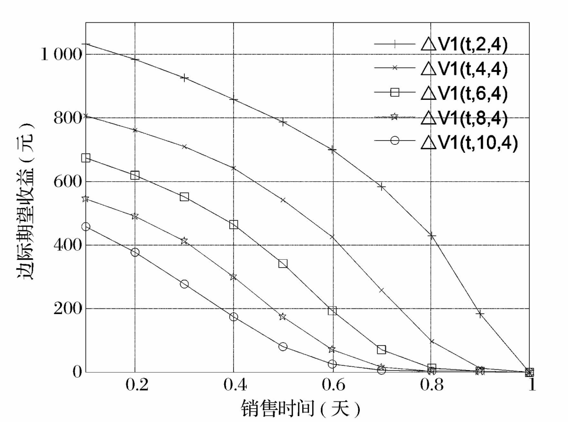

图9　航空公司1的边际期望收益

4.2.5　竞争环境下三价格等级与两价格等级期望收益比较

在相同的参数设置下，对比两价格等级与三价格等级下的期望收益。由图10可得，在竞争环境下，当 n_2 固定时，随着 n_1 的增大，三价格等级下的航空公司1的期望收益逐渐大于两价格等级下的期望收益。这与李小萌[10]对单一航班的不同价格等级的期望收

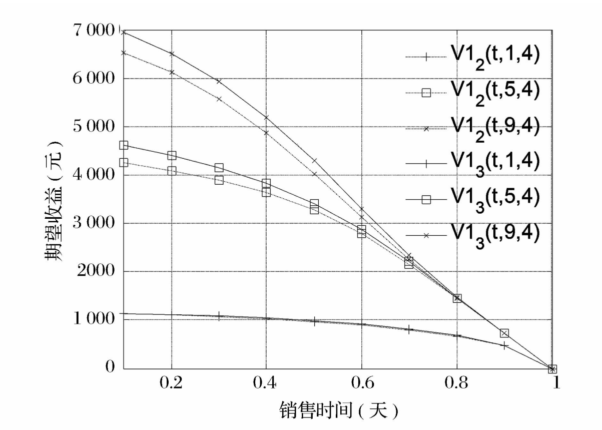

图 10 不同价格等级下 V_1 随 t 的变化关系图

益得出的结论相同。由于乘客对于不同的价格具有不同的价格弹性,因此航空公司应该进行动态差别定价,以吸引不同消费水平的旅客,提高收益。

5 结论

在现有动态定价模型基础上,将离散价格等级由两价格等级扩展成三价格等级,尝试解决收益管理动态定价的多级价格等级问题,通过算例验证模型性质,以及验证了多价格等级运营能够获得更大收益在竞争环境下的平行航班中仍然成立。

参考文献

[1] 罗利,彭际华. 竞争环境下的民航客运收益管理动态定价模型[J]. 系统工程理论与实践,2007(11):15－25.

[2] 曹海娜. 基于 MNL 模型的平行航班舱位控制与动态定价研究[D]. 北京:北京理工大学,2015.

[3] 彭际华. 竞争环境下的民航客运收入管理动态定价模型[D]. 成都:四川大学,2006.

[4] 商红岩. 民航客运的多等级动态差别定价问题研究[D]. 南京:南京航空航天大学,2006.

[5] 陈锐锐. 中国民营航空公司收益管理定价问题研究[D]. 南京:南京航空航天大学,2010.

[6] 李豪. 基于乘客选择行为的双航班竞争动态定价模型[J]. 工业工程,2010,13(2):86－90.

[7] FENG Y,XIAO B. A continuous-time yield management model with multiple prices and reversible price changes[J]. Management Science,2000,46(5):644－657.

[8] 李晓花. 航空公司客运收入管理动态定价与舱位控制的统一策略及其风险分析初探[D]. 成都:四川大学,2004.

[9] 李小萌. 民航客运动态票价及市场应急方案研究[D]. 兰州:兰州交通大学,2013.

[10] 郭晖. 区域航空公司收益管理模型及其应用研究[D]. 武汉:华中科技大学,2008.

[11] 罗利. 民航客运平行航班动态定价模型研究[D]. 成都:西南交通大学,2005.

[12] XIAO Y B,CHEN J,LIU X L. The impact of passenger diversion between flights on the optimal protection levels[C]//International Conference on Service Systems and Service Management (ICSSSM'04),Beijing,2004:216－220.

A Dynamic Pricing Model for Parallel Flights with Multiple Price Levels under Competitive Environment

ZHU Zhi-yu, WANG Zong-bao, LIU Yan, MA Jing-lu

(Airport Engineering and Transportation Management School,Civil Aviation Flight University of China,Guanghan Sichuan 618307,China)

Abstract: Under the competitive environment, this paper develops a dynamic pricing model considering the passengers' choice behavior for two competitive airlines with the timing of the switch at different prices as decision variables. Three price levels are taken into account for each flight. The condition of the equilibrium solution is derived, and discusses the method of model. Through a numerical example to validate the model's properties, and comparing with the two levels of price to prove the superiority of the dynamic pricing with the multistage price.

Key words: revenue management;dynamic pricing;MNL