

基于 Copula 函数和蒙特卡洛模拟方法的权证定价

黄 珍¹, 苑慧玲¹, 倪丽云²

(1. 山东科技大学 金融工程研究所, 山东 青岛 266590; 2. 同济大学 经济与管理学院, 上海 200092)

摘要:在分析计算单一权证价格的基础上,提出了利用 Copula 函数和蒙特卡洛模拟的方法来计算多种权证的定价模型。具体实例分析表明,该方法可为投资者提供有益的投资决策参考。

关键词:Copula 函数;蒙特卡洛模拟;多种权证

中图分类号:F830 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-1807(2012)11-0161-04

2011年8月11日,长虹CWB1顺利谢幕,标志着长达6年的权证市场暂时告一段落。在这六年的发展历程中,权证对股权分置改革的顺利推进实施起到了举足轻重的作用,但是也存在着一系列的问题,其中权证的定价模型能否正确反映权证的市场价格引起人们的广泛关注,众多学者致力于这方面的研究。2005年,李卓威^[1]比较了大陆和香港权证市场的演变和发展,同时对国内权证市场提出了建议和计划;2006年,李存行^[2]针对我国权证市场进行了认股权证的定价研究;2007年,周雷和楚晓玉^[3]以宝钢JTB1为例分析了B-S模型的实际定价效果;2008年,傅永昌、温亚昌、周少武^[4]指出了我国欧式认购权证市场价格与理论价格存在偏离的主要原因;2009年,杜文歌和刘小茂^[5]将分数布朗运动和跳过程运用于股本权证定价研究;2010年,赵健^[6]则把遗传算法的BP神经网络方法应用到权证定价中;2011年,孔鑫和刁治^[7]研究了基于GARCH模型的权证定价理论在武钢股份中的应用问题。

上述的权证定价方法虽然在一定程度上能够诠释权证定价问题,但是这些模型都存在不同程度的缺陷,有些模型的解不容易用数值方法求得,有些模型不能够充分考虑权证之间的非线性结构,从而导致理论结果与现实情况偏离过大。因此,进一步寻求更为科学的权证定价方法。为投资者提供更加准确的定价技术,具有重要的意义。

蒙特卡罗方法^[8-9]又称统计模拟法、随机抽样技

术,是一种随机模拟方法,根据随机变量变化的路径,模拟出随机变量可能发生的情况,进而得到变量未来的分布情况。运用该方法可以解决通常的数值方法难以解决的随机问题,且具有程序结构简单、误差容易确定等优点。

本文将致力于权证组合的定价问题,主要基于下列考虑:在同一时期,权证市场上往往不是存在单一的权证品种,而是多种权证同时存在的。考虑到权证之间往往存在着非线性结构,下文也将运用 Copula 函数这一揭示非线性结构的优良技术工具进行研究。本文尝试提出利用蒙特卡洛模拟计算单一权证、利用 Copula 函数揭示不同权证的非线性结构的计算多种权证的定价模型,将为投资者提供更具有参考价值的技术方法。

1 基于蒙特卡洛与 Copula 函数方法的权证组合定价

在权证市场上,权证的品种多种多样,而且未来的权证产品会更加丰富,同时由于认股权证的随机波动率和跳跃特性,基于随机波动率的认股权证的定价问题将是典型的高维衍生证券定价问题,因此利用蒙特卡洛随机算法和 Copula 函数具有很强的针对性。

1.1 计算单一权证价格的蒙特卡洛方法

本文采用蒙特卡罗方法的基本思想计算单一权证。假设股票价格服从以下随机微分方程:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (1)$$

收稿日期:2012-08-10

基金项目:国家自然科学基金(70971079);春蕾项目(2010AZZ176)

作者简介:黄珍(1980—)女,江苏南京人,山东科技大学信息科学与工程学院讲师,理学硕士,研究方向:金融数学与金融工程;苑慧玲(1987—),女,山东菏泽人,山东科技大学信息科学与工程学院、金融工程研究所读硕士研究生,研究方向:金融工程;倪丽云(1975—),女,山东泰安人,金刚石资本管理有限公司行业研究员,同济大学经济管理学院金融工程博士,研究方向:金融学。

其中, S 是标的股票价格; μ 为漂移率, 是计算连续收益率的股票在单位时间内的预期收益率; σ 是波动率, 即计算连续收益率的股票在单位时间内收益的自然对数的标准差; α 是一个广义维纳过程。

为了模拟资产价格在 $[0, T]$ 路径, 必须以步长 δ_t 来离散化时间。根据标准维纳过程的性质, 可以得到股票价格离散时间模型

$$\ln S(t + \delta_t) - \ln S(t) = \mu \delta_t + \sigma \sqrt{\delta_t} \epsilon \quad (2)$$

这里, $\epsilon \sim N(0, 1)$ 是标准正态分布变量。

对于欧式认购权证, 在到期日它的现金流

$$\max\{0, S(0)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}\epsilon} - K\} \quad (3)$$

其中 K 是执行价格, r 是无风险利率, σ 是标准差。其贴现收益为:

$$E(e^{-rT} \max\{0, S(0)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}\epsilon} - K\}) \quad (4)$$

公式(4)给出了当前认购权证的价格。进一步利用下面的蒙特卡洛算法可以求出认购权证的价格:

1) 生成标准正态分布随机数 ϵ_i ;

2) 由第一步生成的 ϵ_i 代入

$$S_i(T) = S(0)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}\epsilon_i} \quad (5)$$

$$C_i = e^{-rT} \max\{0, S_i(T) - K\} \quad (6)$$

3) 重复 1 和 2 的步骤, 模拟 6 000 次, 得到 $C_1, \dots, C_{6000}$, 利用公式

$$\bar{C} = \frac{(C_1 + C_2 + \dots + C_{6000})}{n} \quad (7)$$

$\bar{C}$ 即为所求的认购权证的价格。

1.2 揭示权证组合的 Copula 函数方法

当多种权证同时存在的时候, 每种权证的股票不一定都满足正态分布, 而且权证之间存在着非线性结构, 利用 Copula 函数可以很好的揭示这种关系。采用非参数估计法和 K-S 检验选择合适的 Copula 函数^[10-11], 它们的股票的收益率联合分布函数可以写成如下形式:

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = C(F_{X_1}(X), \dots, F_{X_n}(X)) \quad (8)$$

其中, $C(F_{X_1}(X), \dots, F_{X_n}(X))$ 为选取的连接密度函数, $F_{X_1}(X), \dots, F_{X_n}(X)$ 为各种权证股票收益率的边际分布函数, 在一般情况下, 权证股票收益率的分布不一定满足正态分布, 边际分布不一定为正态分布。计算多个当前权证股票价格的步骤如下:

1) 产生 n 个均匀分布 $U(0, 1)$ 随机数 $a_1, a_2, \dots, a_n$;

2) 令所求的第一个随机数 $u_1 = a_1$, 通过选定的 Copula 函数求得第二个序列在均匀分布的随机数 u_2 , 即求 $\frac{\partial C(u_1, u_2, 1, \dots, 1)}{\partial u_1} = a_2$ 的解 u_2^* , 令 $u_2 =$

u_2^* ;

3) 与 2 的步骤类似, 一直产生第 n 个随机数 $u_n = a_n$, 通过选定的 Copula 函数求得第 n 个序列在均匀分

布的随机数 u_n , 即求 $\int_0^{u_n} \frac{\frac{\partial^n C(u_1, u_2, u_3, \dots, t)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial t}}{\frac{\partial^{n-1} C(u_1, u_2, u_3, \dots, 1)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_{n-1}}} dt =$

$\frac{\frac{\partial^{n-1} C(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_{n-1}}}{\frac{\partial^{n-1} C(u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, 1)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_{n-1}}} = a_n$ 的解 u_n^* , 令 $u_n =$

u_n^* ;

4) 重复 1, 2, 3 的步骤, 模拟 6 000 次, 可以得到随机数对 $(u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{nj}), j = 1, 2, \dots, 6 000$, 那么股票价格收益率 $x_{ij} = F_{x_{ij}}^{-1}(u_{ij}), i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, 6 000$;

5) 将模拟产生的股票价格收益率 x_{ij} (其中 $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, 6 000$) 代入 $X_j = w_1 x_{1j} + \dots + w_n x_{nj}$, 求得股票组合的价格收益率 X_j , 权重 w_i 可以利用 1-9 比较尺度求得;

6) 将第 5 步产生的股票组合的价格收益率 X_j 代入 $C_j = e^{-X_j T} \max\{0, S(0)e^{X_j T} - K\}, j = 1, 2, \dots, 6 000$, 其中 K 是执行价格, $S(0)$ 是权证组合的初始价格, 然后将 $C_j (j = 1, 2, \dots, 6 000)$ 代入 $\bar{C} = \frac{(C_1 + C_2 + \dots + C_{6 000})}{n}$, 则 $\bar{C}$ 就为所求的权证组合的价格。

2 应用实例

利用 Copula 函数、蒙特卡洛方法对实际市场的权证组合进行分析。首先选取 2006 年 12 月 19 日至 2007 年 12 月 10 日, 伊利权证(580009)、马钢权证(580010)、中化权证(580011)三种权证以及标的股票的实际交易数据(数据来源: 国泰安 csmar 数据库), 借助 spass13.0 软件进行统计分析, 如图 1、图 2、图 3 所示。

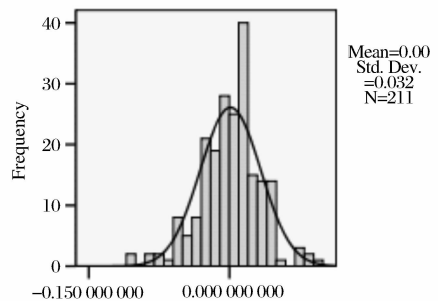


图1 伊利权证标的股票的对数收益率

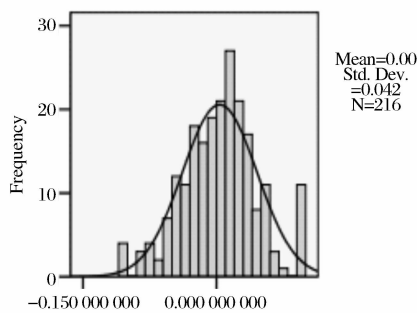


图2 马钢权证标的股票的对数收益率

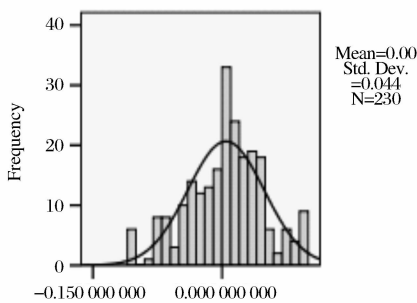


图3 中化权证标的股票的对数收益率

上图表明,权证标的股票的对数收益率满足正态分布。并且借助 spass13.0 软件分别对伊利权证和马钢权证,马钢权证和中化权证,中化权证和伊利权证做线性拟合,得到模型拟合度分别为 0.139, 0.019, 0.003,它们都是非常小的,由此三种权证的收益率之间存在着非线性关系。

进一步估计出各个分布的参数,得出各权证的边缘分布函数。通过选择合适的 Copula 函数,求得投资者面临的权证组合收益率的联合分布函数,借助 Matlab7.0 软件,估计出 Copula 函数的参数。具体结果见表 1。

表 1 三种连接函数的参数估计结果

	Gumbel Copula	Frank Copula	Clayton Copula
参数 α	2.453	0.989	-1.112

由表 1 可以得出,Clayton Copula 的参数 $\alpha < -1$, 不满足参数范围要求,所以无法满足这三种权证之间的相依性关系,其他都在相应的参数范围内。

接着,对 Copula 函数进行 K-S 检验,发现 Gumbel Copula 函数是最优的连接函数。具体结果见表 2。

表 2 Copula 函数的 K-S 检验结果

	Gumbel Copula	Frank Copula	Clayton Copula
Z 值	0.652	0.676	—
P 值	0.764	0.703	—

由表 2 可以看出,Gumbel Copula 的 Z 值比 Frank Copula 的 Z 值小,Gumbel Copula 的 P 值比 Frank Copula 的 P 值大,因此 Gumbel Copula 的拟合结果最好。于是,连结函数选择 Gumbel Copula。

第三,选择伊利权证(580009)、马钢权证(580010)、中化权证(580011)分别标的股票在 2006 年 12 月 19 日至 2007 年 12 月 10 日收盘价,由于篇幅的限制,给出 2007 年 4 月 16 日(周一)到 2007 年 4 月 20 日(周五)的收盘价如表 3。

表 3 三种权证在 2007.04.16—2007.04.20 的收盘价
元

日期 权证	04.16	04.17	04.18	04.19	04.20
伊利权证标的股票	29.35	28.84	28.32	26.77	28.16
马钢权证标的股票	7.62	7.52	7.78	7.24	7.52
中化权证标的股票	15.59	15.51	15.41	14.26	14.81

各权证的执行价格分别为 8 元,3.4 元,6.58 元。在这段时间内的各个权证的实际价格如表 4。

表 4 三种权证在 2007.04.16—2007.04.20 的价格 元

日期 权证	04.16	04.17	04.18	04.19	04.20
伊利权证	21.7	20.886	20.682	19.077	20.157
马钢权证	4.569	4.507	4.537	4.121	4.318
中化权证	9.872	9.561	9.341	8.541	8.922

第四,利用蒙特卡洛方法模拟 6 000 次,根据权证组合收益率公式 $x_i = F_{x_i}^{-1}(u_i), i = 1, 2, 3, \dots, 6\ 000$,求得 x_{ij} (其中 $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, 6\ 000$),将其代入 $X_j = w_1 x_{1j} + w_2 x_{2j} + w_3 x_{3j}$,求得股票组合的价格收益率 X_j ,其中权重可以利用 1—9 比较尺度求得: $w_1 = 0.5, w_2 = 0.25, w_3 = 0.25$ 。

第五,将股票组合的价格收益率 X_j 代入权证定价公式 $C = e^{-X_j T} \max\{0, S(0)e^{X_j T} - K\}$,其中对三种权证的执行价格加权求均值后可以得到权证组合的执行价格 $K = 6.495$,前一天的收盘价为当天的初始价格,对表 3 中三种权证标的股票的收盘价加权求均值后可以得到权证组合在 2007 年 4 月 17 日到 2007 年 4 月 20 日初始价格分别为 20.477 5 元,20.177 5 元,19.957 5 元,18.76 元,由于 4 月 20 日为周六不考虑期初始价格。然后对 $C_j (j = 1, 2, \dots, 6\ 000)$ 求平均,可以计算出这段时间权证组合的价格,同时,对表 4 中的权证价格加权求均值得到权证组合的实际价格,二者进行比较,见表 5。

表 5 三种权证理论价格与实际价格的比较 元

日期 权证组合	04. 17	04. 18	04. 19	04. 20
实际价格	13. 960	17. 548	12. 704	13. 389
理论价格	11. 836	15. 542	9. 897	11. 325

表 5 表明利用此方法计算权证组合的价格与权证组合的实际价格偏离程度较小,计算结果较为准确。

3 结束语

本文在分析目前存在的权证定价方法的基础上,提出了利用 Copula 函数和蒙特卡罗模拟方法计算权证组合价格的思路,给出了相应的计算方法。此方法充分考虑了多种权证之间的非线性关系,从而克服了现有方法的缺陷。实例分析表明,本方法为投资者提供了更为科学的决策依据。

参考文献

[1] 李卓威. 香港权证市场的演变及发展探讨[D]. 广州:暨南大学, 2006.

[2] 李存行. 认股权证的定价研究[J]. 统计与决策, 2006, 23 (1): 22—24.

[3] 周雷,楚晓玉. 我国认证股定价问题实证分析—以宝钢 JTB1 为例[J]. 价值工程, 2007(8):134—137.

[4] 傅永昌,温亚昌,周少武. 我国欧式认购权证市场价格与理论价格偏离的实证分析[J]. 经济问题探索, 2008(1):179—183

[5] 杜文歌,刘小茂. 基于分数布朗运动和跳过程的股本权证定价模型[J]. 价值工程, 2009(6):151—154.

[6] 赵健. 基于遗传算法的 BP 神经网络在权证定价中的应用[J]. 金融理论与实践, 2010(9):22—27.

[7] 孔鑫,刁治. 基于 GARCH 模型的权证定价理论研究及实证检验[J]. 东方企业文化, 2011(9):9—10.

[8] 张建中. 蒙特卡洛方法[J]. 数学的实践与认识, 1974(2):28—40.

[9] 马俊海,王彦. 认股权证定价的蒙特卡罗模拟方法及其改进技术[J]. 管理工程学报, 2010(3):75—81.

[10] 于波,陈希镇,杜江. Copula 函数的选择方法与应用[J]. 数理统计与管理, 2008, 27(6):1027—1033.

[11] 吴娟,刘次华,邱小霞,文婷,万芳. 多元 Copula 参数模型的选择[J]. 武汉大学学报:理学版, 2008, 54(3):267—270.

Warrant Price Based on Copula Function and Monte Carlo Simulation Methods

HUANG Zhen¹, YUAN Hui-ling¹, NI Li-yun²

(1. Financial Engineering Research Institute, Shandong Science and Technology University, Qingdao Shandong 266590, China;
2. School of Economy and Managemen, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: In this paper, the pricing method of calculating a variety of warrants is proposed based on calculations of a warrant price, The method can be regarded as the a useful investment decision-making reference for investors by the warrant-specific examples being applied.

Key words: Copula function; Monte Carlo simulation; various warrants

(上接第 66 页)

参考文献

[1] 希特,霍斯克深,杜安. 爱尔兰等战略管理[M]. 薛有志,张

世云,等,译. 北京:机械工业出版社, 2010:123—147.

[2] 宋东风. 基于长尾理论的我国中小企业核心竞争力的评价模型研究[J]. 科技和产业, 2012(4):77—80.

Competitiveness Evaluation about Qinghai Tibetan Medicine Industry Based on AHP

JI Min-quan

(College of Finance, Qinghai University, Xining 810016, China)

Abstract: Based on the "Diamond Model" of Potter, this article constructs the competitiveness evaluation index system of Qinghai Tibetan medicine industry. By using AHP method to establish fuzzy assessment model based on determing the index weight, it comprehensive evaluates competitiveness level of Qinghai Tibetan medicine industry. According to the evaluation conclusion to determine the main factors which influences of Qinghai Tibetan medicine industry competitiveness level.

Key words: Qinghai Tibetan medicine; Diamond model; industrial competitiveness