第 12 卷 第 11 期
2012 年 11 月

科 技 和 产 业
Science Technology and Industry

Vol. 12, No. 11
Nov., 2012

基于随机需求、随机提前期的(Q,R)库存模型

蒋志明[1,2]，时明荣[2]

(1. 上海中桥职业技术学院，上海 201319；2. 上海海事大学 经济管理学院，上海 201306)

摘要：(Q,R) 库存模型是库存管理中的重要模型，而目前关于 (Q,R) 库存模型的研究常常假设提前期为常数，但在现实生产中，提前期很少是常数。文章在前人研究的基础上，将提前期视为随机变量，建立了基于随机需求、随机提前期的 (Q,R) 库存模型，最后通过一个实例验证了模型的科学性和实用性。

关键词：库存；随机提前期；灵敏度分析

中图分类号：TP14 **文献标志码**：A **文章编号**：1671－1807(2012)11－0078－03

Ronald[1] 的文献表明，库存管理对企业及企业所在的供应链的经济效益都有重要的影响，维持这些库存每年大约耗费其价值的 20%～50%。自从 1913 年，Harris 提出经济批量模型以来，经过许多学者的理论研究与实验分析，库存模型研究取得了较大的进展[2]。目前，关于库存模型的研究主要集中在需求确定和需求不确定情况下的库存策略，这些库存模型中，提前期常常设置为常数；但在现实的生产过程中，提前期很少是常数，并且根据 Hau L. 等人的研究表明[3]：提前期是需求信息放大效应的主要因素之一。本文重点研究基于随机需求、随机提前期的 (Q,R) 库存模型，以找到管理提前期和控制库存的有效途径。

1 建模

本模型采取 (Q,R) 库存管理策略(其库存模型如图 1 所示)，对库存系统的存储量进行严格监控，当现有库存量降低至再订货点 R 时，发出订单，订购量为 Q，考虑连续盘点型(Continuous Review) 库存控制策略，决策变量是订货批量和提前期。

1.1 模型假设

假设 1：假定在一个批量 Q 到达仓库后，现有库存水平总是高于再订货水平 R，因此在一个提前期内，只会有一次订货，即不会发生合同交叉的问题。这个假设也保证了连续订货，产生随机提前期问题。

假设 2：连续的随机提前期是相互独立的，订货合同之间不发生交叉。

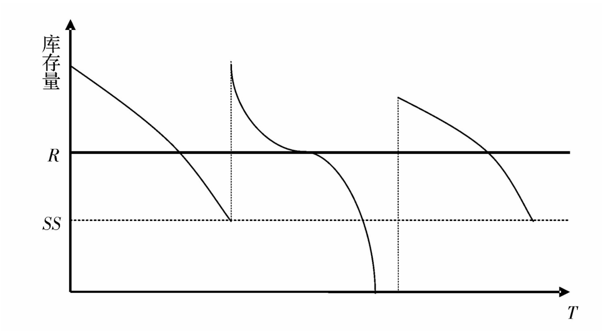

图 1 (Q,R)库存模型

假设 3：提前期 t 为随机变量，L 为提前期的平均值，σ_t 为提前期的标准差。

假设 4：单位时间需求变量 X：服从期望值为 u_x，标准差为 σ_x 的分布。

假设 5：C_1 为单位时间单位货物的储存费用；H 为储存费用；C_2 为单位时间单位货物的缺货费用；V 为缺货费用；C_3 为一次定购费用；y 为提前期需求量。

假设 6：CSL：周期服务水平(所有补货周期中能满足顾客所有需求的补货周期所占比重)，$CSL = P(y \leqslant R) = \alpha$。

1.2 计算库存费用

由假设 4 可知，提前期需求量 y：服从期望值为 Lu_x，标准差为 $\sqrt{L}\sigma_x$ 的分布且密度函数为 $f(y, Lu_x, \sqrt{L}\sigma_x)$[4]。

因为再订货点的值等于提前期内的平均需求量

收稿日期：2012－08－18

作者简介：蒋志明(1962—)，男，上海人，上海中侨职业技术学院副董事长、院长，上海海事大学客座教授，博士，研究方向：数学、物流管理、教育管理；时明荣(1988—)，女，江苏连云港人，上海海事大学经济管理学院管理科学与工程专业硕士研究生，研究方向：物流管理与工程。

加上安全库存量，即：

$$R = Lu_x + ss \tag{1}$$

又由假设 6：$CSL = P(y \leqslant R) = \alpha$，所以：

$$CSL = P(y \leqslant R) = \int_0^R f(y, Lu_x, \sqrt{L}\sigma_x)\mathrm{d}y = F(R, Lu_x, \sqrt{L}\sigma_x) = \alpha \tag{2}$$

由(1)、(2)可以求出：$R = F(\alpha, Lu_x, \sqrt{L}\sigma_x)^{-1}$，

$ss = R - Lu_x = F(\alpha, Lu_x, \sqrt{L}\sigma_x)^{-1} - Lu_x$。

每周期的平均库存为：

$$I = \frac{Q}{2} + ss = \frac{Q}{2} + R - Lu_x \tag{3}$$

平均存储费用为：

$$H = C_1 \times I = C_1 \times (\frac{Q}{2} + R - Lu_x) \tag{4}$$

每周期的期望缺货量为：

$$B = \int_R^{\infty} (y - R) f(y, Lu_x, \sqrt{L}\sigma_x)\mathrm{d}y \tag{5}$$

单位时间有 u_x/Q 个周期，则：

$$V = \frac{u_x}{Q} \times C_2 B = \frac{C_2 u_x}{Q} \times \int_R^{\infty} (y - R) f(y, Lu_x, \sqrt{L}\sigma_x)\mathrm{d}y \tag{6}$$

每单位时间的期望总成本(不包括货物成本)：

$$\mathrm{E}[C(Q)] = \frac{u_x}{Q}C_3 + V + H = \frac{u_x}{Q}C_3 + C_1 \times \left(\frac{Q}{2} + R - Lu_x\right) + \frac{C_2 u_x}{Q} \times \int_R^{\infty} (y - R) f(y, Lu_x, \sqrt{L}\sigma_x)\mathrm{d}y \tag{7}$$

等式(7)两边分别对 Q 求一阶导数，并令其等于0，则以求出：

$$Q^* = \sqrt{\frac{2u_x[C_3 + C_2\int_R^{\infty}(y - R) f(y, Lu_x, \sqrt{L}\sigma_x)\mathrm{d}y]}{C_1}} \tag{8}$$

2 案例分析

本文用一个实际案例来验证模型并进行灵敏度分析。设某企业采用连续盘点 (Q,R) 策略管理某种原材料的库存. 该原材料的每年需求服从 $u_x = 6000, \sigma_x = 40$ 的正态分布，每次订货费为 200 元，每件物品的每年存储费为 18 元. 若该原材料发生缺货会延缓产品生产进度，根据以往经验得知，每件原材料的缺货费为 65 元，$CSL = 0.9, L = 0.04$ 年。

2.1 库存费用计算

$C_1 = 18, C_2 = 65, C_3 = 200$。

因为原材料的每星期需求服从 $\mu_x = 6000, \sigma_x = 40$ 的正态分布，$L = 0.04$，所以，在提前期内需求 y 服从均值为 Lu_x，标准差为 $\sqrt{L}\sigma_x$ 的正态分布，所以公式(8)可化为：

$$Q^* = \sqrt{\frac{2u_x[C_3 + C_2\int_R^{\infty}(y - R) f(y, Lu_x, \sqrt{L}\sigma_x)\mathrm{d}y]}{C_1}} = \sqrt{\frac{2u_x(C_3 + C_2 A)}{C_1}}。$$

其中 $A = \int_R^{\infty}(y - R) f(y, Lu_x, \sqrt{L}\sigma_x)\mathrm{d}y = Lu_x + R + RF(R, Lu_x, \sqrt{L}\sigma_x) - Lu_x F_s\left(\frac{R - Lu_x}{\sqrt{L}\sigma_x}\right) + \sqrt{L}\sigma_x f_s\left(\frac{R - Lu_x}{\sqrt{L}\sigma_x}\right)$。

其中，$f_s\left(\frac{R - Lu_x}{\sqrt{L}\sigma_x}\right)$ 为标准正态分布密度函数，$F_s\left(\frac{R - Lu_x}{\sqrt{L}\sigma_x}\right)$ 为标准正态分布函数。

$R = F(\alpha, Lu_x, \sqrt{L}\sigma_x)^{-1} = 250.2524, ss = R - Lu_x = 10.252$。

$A = -0.84974, Q^* = 310$。

$\mathrm{E}(C(Q)) = \frac{u_x}{Q}C_3 + C_1 \times \left(\frac{Q}{2} + R - u_x\right) + \frac{C_2 u_x}{Q} \times \int_R^{\infty}(y - R) f(y, Lu_x, \sqrt{L}\sigma_x)dy = 5776$。

EOQ 模型求解结果为：$EOQ = 412, TC = 5\,816$；基于随机需求 、随机提前期的 (Q,R) 库存模型求解结果为：$Q^* = 310$。$\mathrm{E}(C(Q)) = 577\,6$，可以清楚地看出，在考虑提前期的情况下，可以更加清楚地定义出订货批量大小和再订货点，并且保证了成本的最小。

2.2 参数灵敏度分析

1) C_1 为单位时间单位货物的储存费用对最优订货批量的影响。

$$R_1 = \frac{E_{Q^*}}{E_{C_1}} = \frac{\partial Q^*}{\partial C_1} \times \frac{C_1}{Q^*} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{2u_x[C_3 + C_2\int_R^{\infty}(y - R) f(y, Lu_x, \sqrt{L}\sigma_x)\mathrm{d}y]}{C_1}\right\}^{-\frac{1}{2}} \times \frac{2u_x[C_3 + C_2\int_R^{\infty}(y - R) f(y, Lu_x, \sqrt{L}\sigma_x)\mathrm{d}y]}{C_1^2} \times \frac{C_1}{Q^*} = -\frac{1}{2} \tag{9}$$

2) C_2 为单位时间单位货物的缺货费用对最优订货批量的影响。

$$R_2 = \frac{E_{Q^*}}{E_{C_2}} = \frac{\partial Q^*}{\partial C_2} \times \frac{C_2}{Q^*} =$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{2u_x\left[C_3+C_2\int_R^{\infty}(y-R)f(y,Lu_x,\sqrt{L}\sigma_x)\mathrm{d}y\right]}{C_1}\right\}^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\frac{2u_x\int_R^{\infty}(y-R)f(y,Lu_x,\sqrt{L}\sigma_x)\mathrm{d}y}{C_1}\times\frac{C_2}{Q^*}=\frac{1}{2}\times$$

$$\frac{C_2\int_R^{\infty}(y-R)f(y,Lu_x,\sqrt{L}\sigma_x)\mathrm{d}y}{C_3+C_2\int_R^{\infty}(y-R)f(y,Lu_x,\sqrt{L}\sigma_x)\mathrm{d}y} \tag{10}$$

3) C_3 为一次定购费用对最优订货批量的影响。

$$R_3=\frac{E_{Q^*}}{E_{C_3}}=\frac{\partial Q^*}{\partial C_3}\times\frac{C_3}{Q^*}=$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{2u_x\left[C_3+C_2\int_R^{\infty}(y-R)f(y,Lu_x,\sqrt{L}\sigma_x)\mathrm{d}y\right]}{C_1}\right\}^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\frac{2u_x}{C_1}\times\frac{C_3}{Q^*}=$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{C_3}{C_3+C_2\int_R^{\infty}(y-R)f(y,Lu_x,\sqrt{L}\sigma_x)\mathrm{d}y} \tag{11}$$

由公式(9)、(10)、(11)可得：$R_1=-0.5$，$R_2=-0.19077$，$R_3=0.6907$ $|R_1|\leqslant 1$，$|R_2|\leqslant 1$，$|R_3|\leqslant 1$，最优订货批量对于 C_1、C_2 和 C_3 的变动率不敏感，在现实中，C_1、C_2 和 C_3 可能随时间变化而有所变化，但是，由于最优订货批量对 C_1、C_2 和 C_3 不敏感，由此可见，该最优订货批量在实际生产中仍具有很高的价值。

3　结束语

经济订货批量模型是目前大多数企业最常采用的货物定购方式，同时，该模型的确曾给企业带来了一些利益。但随着市场变化，市场竞争已从传统的、简单的、成本优先的竞争模式，向时间优先的时间竞争转化[4]，因此，传统的经济订货批量模型已经不能满足企业库存优化需求了，为了增强企业的竞争力，企业不得不考虑对其他参数的优化，特别是提前期的优化。本文中针对采用 (Q,R) 库存策略的单类物品库存系统，建立了基于随机需求、随机提前期的最优订货批量模型，模型假设提前期的需求函数是可知的，从而求得使单位时间库存总成本最小的最优订购批量。通过举例说明，该模型能有效解决随机需求、随机提前期的库存管理问题。

参考文献

[1] RONALD H BALLOU. Business logistics management planning, organizing and controlling the supply chain[M]. 4thed. Prentice-Hall, Englewood, UpperSaddle River, NJ, 1998:248－290.

[2] 李丽．模糊随机供需环境下的供应链库存管理[M]．北京：科学出版社，2011:35－42.

[3] LEEHL TANGCS. Modeling the costs and benefits of delayed product differentiation[J]. Management Science, 1997, 43: 40－53.

[4] 马士华，林勇．基于随机提前期的（Q，R）库存模型[J]．计算机集成制造系统 CIMS，2002，8（5）:396－398.

The (Q,R) Inventory Model Based on the Random Demand and Random Lead Time

JIANG Zhi-ming[1,2], SHI Ming-rong[2]

(1. Shanghai Zhongqiao College, Shanghai 201319, China; 2. Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China)

Abstract: The (Q,R) inventory model is the important model for inventory management, And also at present, the research about (Q,R) inventory model often assumes that lead time is a constant, But in the fact, lead time is not a constant. In this paper, we will set a (Q,R) inventory model based stochastic lead time and analyses the sensitivity of the related parameters, Finally, we use an example to show that the model is scientific and practical.

Key words: inventory; stochastic lead time; the sensitivity